УДК 534.26

ВЛИЯНИЕ АБСОЛЮТНО ОТРАЖАЮЩЕЙ ПЕРЕГОРОДКИ НА ПОЛЕ И ИМПЕДАНС КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ СФЕРЫ

Бутов П. А., Попов Ю. Ю.

Рассмотрим поле и импеданс абсолютно жесткой сферы радиуса a, колеблющейся по нормали к абсолютно жесткой (мягкой) плоской перегородке. В отличие от решения, приведенного в работе [1], мы потребуем лишь выполнения условия $a/d \ll 1$ (d – расстояние от центра сферы до перегородки), не накладывая других ограничений на расстояние d. Это условие позволяет не учитывать многократные отражения, поскольку члены ряда, представляющего отраженное поле, можно оценить по степеням отношения $|h_n'(kd)/h_n'(ka)|$, которое становится малым вместе с отношением a/d.

Будем считать, что полное поле p слагается из p_1 – поля, создаваемого сферой, колебательная скорость которой v изменяется по закону $v=v_0 \exp[j\omega t]$ (временный множитель в дальнейшем будем опускать), p_2 – поля, создаваемого зеркально отраженной сферой и поля p_s, которое возникает при отражении поля p_2 от сферы.

Поле p_1 в системе координат, связанной с центром сферы (ось Oz направлена перпендикулярно перегородке), имеет вид

$$p_2=\pm[j\rho c v_0/h_1'(ka)]h_1(kr_1)\cos\theta_1,$$

обозначения такие же, как и в работе [1]. Тогда поле зеркально отраженной сферы в системе координат, связанной с этой сферой, примет вид

$$p_2=\pm(j\rho c v_0/h_1'(ka))h_1(kr_2)\cos\theta_2,$$

верхний знак соответствует мягкой, а нижний – жесткой перегородке. Это же давление в системе координат, связанной с центром действительной сферы, согласно теореме о сложении сферических функций [2], равно

$$p_2=\pm\frac{j\rho c v_0}{h_1'(ka)}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n h_n'(kd)j_n(kr_1)P_n(\cos\theta_1)\right]. \tag{1}$$

Поле p_s определим в виде ряда:

$$p_s=\sum_{n=0}^{\infty}A_n h_n(kr_1)P_n(\cos\theta_1).$$

Коэффициенты A_n определяются из граничного условия $\partial(p_1+p_s)/\partial N=0$, задаваемого на поверхности неподвижной сферы (полагаем, что амплитуда колебаний сферы мала):

$$A_n=\pm\frac{j\rho c v_0}{h_1'(ka)}\frac{j_n(ka)}{h_n'(ka)}\cdot h_n'(kd)(-1)^n(2n+1).$$

Легко видеть, что поле $p_s'=p_2+p_s$, обусловленное наличием перегородки, равно:

$$p_s'=\frac{j\rho c v_0}{h_1'(ka)}\left\{\pm\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(-1)^n h_n'(kd)\times[j_n(kr_1)-\right.$$
$$\left.-(j_n'(ka)/h_n'(ka))h_n(kr_1)]P_n(\cos\theta_1)\right\}. \tag{2}$$

Следует отметить, что формула (1), а следовательно, и формула (2) справедливы при $r_1<d$.

Теперь вычислим реакцию Ψ полного поля $p=p_1+p_s$ на сферу:

$$\Psi=-2\pi a^2\int_0^{\pi}p(a,\theta)\sin\theta\,d\theta=$$
$$=-\frac{4}{3}\pi a^2\frac{j\rho c v_0}{h_1'(ka)}\left[h_1(ka)\mp 3\frac{h_1'(kd)}{h_1'(ka)}\frac{j}{(ka)^2}\right].$$

Представив импеданс $Z=\Psi/v_0$ в виде $Z=Z_1+Z_2$, где Z_1 – импеданс сферы в безграничной среде, Z_2 – добавок, возникающий в присутствии перегородки, получим

$$Z_1=I+jM=\frac{S\rho c}{12}\frac{k^4a^4}{1+(k^4a^4/4)}+j\frac{\omega M_0}{2}\frac{1+(ka)^2/2}{1+(ka)^4/4}, \tag{3}$$

$$Z_2 = \mp 3\left(\frac{a}{d}\right)^3 \frac{\sqrt{(A^2+B^2)\left[(ka)^6+(2+k^2a^2)^2\right]}}{(1+(ka)^4/4)(1+k^2a^2)} \times$$

$$\times\left\{I\frac{\cos(2ka-kd+\varphi)}{(ka)^3}+jM\frac{\sin(2ka-kd+\varphi)}{2+k^2a^2}\right\},$$

где M_0 – масса среды, вытесненная сферой, S – площадь поверхности сферы, I и M – действительная и мнимая части импеданса Z_1 соответственно,

$$A=\left(1-\frac{(kd)^2}{2}\right)\left(1-\frac{3(ka)^2}{2}\right)+2k^2ad\left(1-\frac{(ka)^2}{4}\right)$$

$$B=kd\left(1-\frac{3}{2}(ka)^2\right)-2ka\left(1-\frac{(kd)^2}{2}\right)\left(1-\left(\frac{ka}{2}\right)^2\right)$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{A(2+a^2k^2)+Bk^3a^3}{k^3a^3A-(2+a^2k^2)B}.$$

В случае ближнего поля, полагая малыми kd и ka, упростим выражение для добавочного импеданса

$$Z_2=\pm\frac{S\rho(ka)^4}{12}\left[1-\frac{3}{10}(kd)^2-2\left(\frac{a}{d}\right)^3\right]\mp$$

$$\mp j\omega M_0\frac{3}{2}\left(\frac{a}{d}\right)^3\left[1-\frac{(ka)^4}{2}+\frac{(kd)^4}{8}\right]. \tag{4}$$

Если пренебречь малыми поправками, то выражение для добавочной присоединенной массы сферы (мнимая часть выражения (4)) становится равно $3M_0(a/d)^3/2$, что точно совпадает с результатом, приведенным в курсе гидродинамики Лэмба [3]. Отметим, что аналогичное выражение, полученное автором работы [1], отличается от лэмбовского фактором $^4/_3$.

Как видно из формулы (3), добавочные сопротивление излучения и присоединенная масса совершают осцилляции при изменении kd. В этом смысле особенно нагляден случай дальнего поля ($kd\gg1$):

$$Z_2=\mp\frac{3}{kd}\left[I\sin(kd)+jM\frac{(ka)^3}{2}\cos(kd)\right],$$

для которого добавочные присоединенная масса и сопротивление излучения ведут себя как квазипериодические функции от безразмерного аргумента kd с амплитудой, убывающей обратно пропорционально расстоянию от центра сферы до перегородки, так что при удалении сферы на бесконечность влияние перегородки перестает сказываться.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ржевкин С. Н.* Ближнее поле и импеданц сферы, колеблющейся вблизи жесткой или мягкой перегородки.– Акуст. ж., 1978, т. 24, № 1, с. 143–146.
2. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968, 584 с.
3. *Лэмб Г.* Гидродинамика. М.– Л.: ГИТТЛ, 1947.

Одесское отделение
Морского гидрофизического института
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
22.VIII.1980