

УДК 534(204.1)

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ОКЕАНЕ

Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я.

Предложен метод расчета звукового поля, создаваемого точечным источником в слое неоднородной среды с различными граничными условиями. Метод удобен при наличии случайных неоднородностей и может оказаться полезным для численного решения детерминированных задач. Рассмотрен частный случай слоистой среды и различные типы граничных условий.

Существующие способы расчета акустических полей в океане [1, 2] оказываются по разным причинам мало пригодными для статистического анализа этих полей. Некоторые из этих методов (геометрическая акустика, метод параболического уравнения) основаны на значительных упрощениях и не описывают, например, обратного рассеяния, которое может быть существенным [3]. Более точные подходы, такие как метод нормальных волн, сводятся обычно к решению краевой задачи для уравнения Гельмгольца, в которой нельзя использовать хорошо разработанную методику решения стохастических уравнений [3] из-за отсутствия динамической причинности, поскольку решение этой задачи зависит функционально от неоднородностей среды во всем пространстве. Поэтому, например, в статье Колера и Папаниколау в [2], посвященной распространению акустических волн в случайно-неоднородном океане, использовано множество приближений, для которых не всегда можно точно указать пределы применимости.

В работах [4, 5] развит метод сведения краевых задач к задаче с начальными данными, для которой условие динамической причинности выполняется, поскольку решение зависит только от предыдущих (по пространству) значений параметров, но не от последующих. Однако в [4, 5] использовалось условие непрерывности волнового поля и его производной на границах слоя среды, содержащей неоднородности. В данной работе этот метод обобщается на случай более сложных граничных условий, характерных для акустики океана. Результаты могут оказаться полезными также и для численного решения детерминированных задач.

Пусть среда с плотностью d_0 занимает область $0 < z < H$, где H — глубина океана. Внутри слоя звуковое давление G , создаваемое точечным источником с координатами (z_0, ρ_0) , удовлетворяет уравнению

$$(1) \quad \partial^2 G(z, \rho; z_0, \rho_0) / \partial z^2 + \Delta_\rho G + k_0^2 [1 + \varepsilon(z, \rho)] G = \\ = \delta(z - z_0) \delta(\rho - \rho_0),$$

где k_0 — волновое число, функция ε описывает пространственные изменения скорости звука, $\rho = (x, y)$ — координаты в плоскости, перпендикулярной к оси z . При $z > H$, $z < 0$ имеем уравнение

$$(2) \quad \partial^2 G(z, \rho; z_0, \rho_0) / \partial z^2 + \Delta_\rho G + k_m^2 G = 0,$$

причем плотность среды равна d_m ; $m=1$ при $z > H$, $m=2$ при $z < 0$. На границах слоя ($z=H$ и $z=0$) сохраняется непрерывность звукового давления G и нормальной компоненты скорости, пропорциональной $d^{-1} \partial G / \partial z$. Используя явный вид решения в областях $z > H$ и $z < 0$, можно записать граничные условия в виде

$$(3) \quad (d_1/d_0) \partial G / \partial z = i \sqrt{k_1^2 + \Delta_\rho} G, \quad z=H, \\ (d_2/d_0) \partial G / \partial z = -i \sqrt{k_2^2 + \Delta_\rho} G, \quad z=0.$$

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу об отыскании волнового поля $g(z, \rho; z_0, \rho_0)$, удовлетворяющего в слое $0 \leq z \leq H$ уравнению (1) с граничными условиями

$$(4) \quad \partial g / \partial z = i \sqrt{k_0^2 + \Delta_0} g, \quad z = H,$$

$$\partial g / \partial z = -i \sqrt{k_0^2 + \Delta_0} g, \quad z = 0,$$

которые не зависят от d и соответствуют непрерывности поля и его нормальной производной на границах, причем вне слоя $\varepsilon = 0$, $k_1 = k_2 = k_0$. Как уже отмечалось, для такой задачи можно написать [5] систему уравнений инвариантного погружения, которая удовлетворяет условию динамической причинности. Кроме того, для определения функции g можно использовать какой-либо приближенный метод.

Отметим, что для функции g можно написать уравнения инвариантного погружения двух типов. Первый соответствует выбору в качестве параметра «погружения» глубины океана H . Подобные уравнения приведены в [5], они удобны для определения статистических характеристик аналитическими методами (усреднение по ансамблю). Однако применение численных методов в этом случае, по-видимому, затруднительно, поскольку для слоя конечной толщины H случайные поля не стационарны и нельзя использовать гипотезу эргодичности.

Другой тип уравнений инвариантного погружения получим, если ввести параметры «погружения» L_0, L , как это показано на фиг. 1. Величина ε отлична от нуля только в заштрихованной области. При этом получаются интегродифференциальные уравнения по переменной L . При $L_0 \rightarrow -\infty$ решение будет стационарным по L случайным полем, что позволяет использовать гипотезу эргодичности для расчета статистических характеристик волнового поля по одной реализации $\varepsilon(z, \rho)$.

Напишем для функций G и g формулу Грина, которая в данном случае имеет вид

$$G(z, \rho; z_0, \rho_0) = g(z, \rho; z_0, \rho_0) - \int d\rho' [g(z', \rho'; z, \rho) \times \\ \times \partial G(z', \rho'; z_0, \rho_0) / \partial z' - G(z', \rho'; z_0, \rho_0) \partial g(z', \rho'; z, \rho) / \partial z']_{z'=H} + \\ + \int d\rho' [g(z', \rho'; z, \rho) \partial G(z', \rho'; z_0, \rho_0) / \partial z' - \\ - G(z', \rho'; z_0, \rho_0) \partial g(z', \rho'; z, \rho) / \partial z']_{z'=0}$$

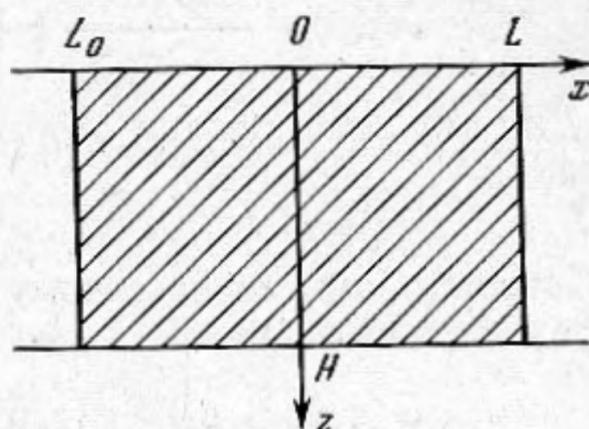
или с использованием граничных условий (3) и (4)

$$(5) \quad G(z, \rho; z_0, \rho_0) = g(z, \rho; z_0, \rho_0) + d_0 \int d\rho' G(H, \rho'; z_0, \rho_0) \times \\ \times (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_1) g(H, \rho'; z, \rho) + d_0 \int d\rho' G(0, \rho'; z_0, \rho_0) (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_2) g(0, \rho'; z, \rho).$$

где $\hat{\xi}_m = id_m^{-1} \sqrt{k_m^2 + \Delta_{\rho'}}$, $m = 0, 1, 2$. Для определения величин $G(H, \rho'; z_0, \rho_0)$ и $G(0, \rho'; z_0, \rho_0)$ получаем из (5) систему интегральных уравнений

$$G(H, \rho; z_0, \rho_0) = g(H, \rho; z_0, \rho_0) + d_0 \int d\rho' G(H, \rho'; z_0, \rho_0) (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_1) \times \\ \times g(H, \rho'; H, \rho) + d_0 \int d\rho' G(0, \rho'; z_0, \rho_0) (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_2) g(0, \rho'; H, \rho),$$

(6)



Фиг. 1. Схема введения параметров погружения. В заштрихованной области ε отлична от нуля

$$G(0, \rho; z_0, \rho_0) = g(0, \rho; z_0, \rho_0) + d_0 \int d\rho' G(H, \rho'; z_0, \rho_0) (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_1) \times \\ \times g(H, \rho'; 0, \rho) + d_0 \int d\rho' G(0, \rho'; z_0, \rho_0) (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_2) g(0, \rho'; 0, \rho).$$

Фигурирующий в равенствах (5), (6) оператор $i\sqrt{k^2 + \Delta_0}$ содержится также [5] и в системе уравнений инвариантного погружения для определения функции g , если в качестве дополнительной переменной использовать глубину океана H . Как показано в работе [6], его можно заменить интегральным оператором с ядром

$$(7) \quad \mathcal{K}(\rho) = \frac{\exp(ik\rho)}{2\pi\rho^2} \left(\frac{1}{\rho} - ik \right).$$

Для акустики океана особый интерес представляют граничные условия вида

$$(3') \quad G(0, \rho; z_0, \rho_0) = 0, \quad \partial G(z, \rho; z_0, \rho_0) / \partial z|_{z=H} = G'(H, \rho; z_0, \rho_0) = 0,$$

соответствующие предельному переходу в (3) $d_1 \rightarrow \infty$, $d_2 \rightarrow 0$. Из (5) и (6) в этом случае получаем

$$(8) \quad G(z, \rho; z_0, \rho_0) = g(z, \rho; z_0, \rho_0) + d_0 \int d\rho' G(H, \rho'; z_0, \rho_0) \hat{\xi}_0 g \times \\ \times (H, \rho'; z, \rho) + \int d\rho' G'(0, \rho'; z_0, \rho_0) g(0, \rho'; z, \rho), \\ G(H, \rho; z_0, \rho_0) = g(H, \rho; z_0, \rho_0) + d_0 \int d\rho' G(H, \rho'; z_0, \rho_0) \hat{\xi}_0 g \times \\ \times (H, \rho'; H, \rho) + \int d\rho' G'(0, \rho'; z_0, \rho_0) g(0, \rho'; H, \rho), \\ 0 = g(0, \rho; z_0, \rho_0) + d_0 \int d\rho' G(H, \rho'; z_0, \rho_0) \hat{\xi}_0 g(H, \rho'; 0, \rho) + \\ + \int d\rho' G'(0, \rho'; z_0, \rho_0) g(0, \rho'; 0, \rho).$$

Отметим, что аналогичное (5) уравнение можно получить для поверхности S произвольного вида, если на ней задано «локальное» граничное условие [7]

$$\mathbf{n} \partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) / \partial \mathbf{r} = \gamma G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in S,$$

\mathbf{n} — вектор нормали к поверхности, $\gamma = -i\omega dZ^{-1}$, Z — импеданс границы, не зависящий от угла падения.

Для слоистых сред, когда $\varepsilon(z, \rho) \equiv \varepsilon(z)$, $G(z, \rho; z_0, \rho_0) = G(z, z_0, \rho - \rho_0)$, можно провести преобразование Фурье по поперечным координатам. Тогда для величины

$$G(z, z_0; \mathbf{q}) = \int d\rho \exp(-i\mathbf{q}\rho) G(z, z_0; \rho)$$

получим алгебраические уравнения. Из равенства (5) находим

$$(9) \quad G(z, z_0; \mathbf{q}) = g(z, z_0; \mathbf{q}) + d_0 (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_1) g(z, H; \mathbf{q}) \times \\ \times G(H, z_0; \mathbf{q}) + d_0 (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_2) g(z, 0; \mathbf{q}) G(0, z_0; \mathbf{q}),$$

где вместо операторов $\hat{\xi}_m$ стоят числа $\xi_m = id_m^{-1} \sqrt{k_m^2 - q^2} = -i\omega Z_m(q)$. Для величин $G(H, z_0; \mathbf{q})$ и $G(0, z_0; \mathbf{q})$ получаем систему алгебраических уравнений, откуда

$$(10) \quad G(H, z_0; \mathbf{q}) = A^{-1} g(H, z_0; \mathbf{q}) [1 - d_0 g(0, 0; \mathbf{q}) (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_2)] + \\ + d_0 A^{-1} g(0, z_0; \mathbf{q}) g(H, 0; \mathbf{q}) (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_2), \\ G(0, z_0; \mathbf{q}) = A^{-1} g(0, z_0; \mathbf{q}) [1 - d_0 g(H, H; \mathbf{q}) (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_1)] + \\ + d_0 A^{-1} g(H, z_0; \mathbf{q}) g(H, 0; \mathbf{q}) (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_1), \\ A = 1 - d_0 (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_1) g(H, H; \mathbf{q}) - d_0 (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_2) g(0, 0; \mathbf{q}) + \\ + d_0^2 (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_1) (\hat{\xi}_0 - \hat{\xi}_2) [g(H, H; \mathbf{q}) g(0, 0; \mathbf{q}) - g^2(H, 0; \mathbf{q})].$$

Равенства (9) и (10) выражают искомую функцию Грина $G(z, z_0; \mathbf{q})$ через решение вспомогательной задачи $g(z, z_0; \mathbf{q})$. Чтобы получить окончательный ответ, нужно выполнить обратное преобразование Фурье

$$(11) \quad G(z, z_0; \rho) = (2\pi)^{-2} \int dq G(z, z_0; \mathbf{q}) \exp(iq(\rho - \rho_0)) = \\ = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} dq q G(z, z_0; q) J_0(q|\rho - \rho_0|) = \\ = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dq q G(z, z_0; q) H_0^{(1)}(q|\rho - \rho_0|),$$

где J_0 и $H_0^{(1)}$ — функции Бесселя и Ханкеля.

Для функции g можно написать систему уравнений инвариантного погружения, считая H дополнительной переменной. Решение этой системы сводится к интегрированию уравнения Риккати [4, 5]. В тех случаях, когда функция g известна, формулы (9), (10) позволяют написать ответ для произвольных граничных условий. В частности, при $\varepsilon=0$ легко получить отсюда функцию Грина для трехслойной среды [7].

Для граничных условий вида (3') имеем из (9) и (10)

$$(9') \quad G(z, z_0; q) = g(z, z_0; q) + d_0 \xi_0 g(z, H; q) G(H, z_0; q) + \\ + g(z, 0; q) G'(0, z_0; q),$$

$$(10') \quad G(H, z_0; q) = -A^{-1} g(H, z_0; q) g(0, 0; q) + \\ + A^{-1} g(0, z_0; q) g(0, H; q), \\ G'(0, z_0; q) = A^{-1} g(0, z_0; q) [1 - d_0 \xi_0 g(H, H; q)] + \\ + A^{-1} d_0 \xi_0 g(H, z_0; q) g(H, 0; q), \\ A = -g(0, 0; q) + d_0 \xi_0 [g(0, 0; q) g(H, H; q) - g^2(0, H; q)].$$

В случае слоистых сред можно получить непосредственно для функции G уравнения инвариантного погружения при любых граничных условиях. Если ввести разрывную функцию

$$(12) \quad \bar{\varepsilon}(z) = \begin{cases} \kappa_2^2 - \kappa_0^2, & z < 0, \\ k_0^2 \varepsilon(z), & 0 < z < H, \\ \kappa_1^2 - \kappa_0^2, & H < z, \end{cases}$$

где $\kappa_m = d_m^{-1} d_0 \sqrt{k_m^2 - q^2}$, и рассмотреть уравнение

$$(13) \quad \frac{d^2 G(z, z_0; q)}{dz^2} + [\kappa_0^2 + \bar{\varepsilon}(z)] G = \delta(z - z_0)$$

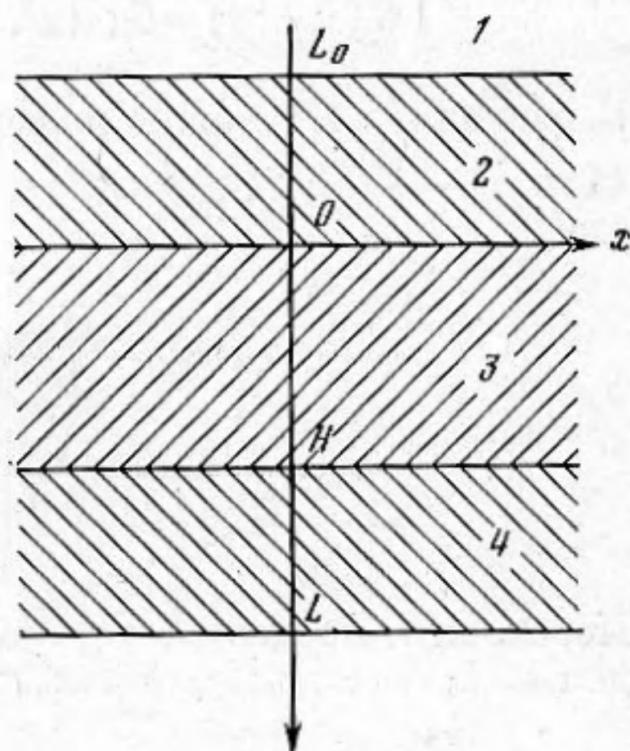
с условием непрерывности поля и его производной в точках разрыва функции $\bar{\varepsilon}(z)$, то решение задачи (13) дает правильное значение поля в области $0 \leq z \leq H$. Введем теперь параметры «погружения» (L_0, L), как это показано на фиг. 2, и положим $\bar{\varepsilon}=0$ при $z < L_0$ и $z > L$. Решение уравнения (13) получается при $L_0 \rightarrow -\infty, L \rightarrow \infty$. Окончательный ответ, как и ранее, получается после проведения преобразования (11).

Будем теперь считать величину L дополнительной переменной, тогда для функции G можно написать [5] следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial L} G(z, z_0; q, L) = \frac{\bar{\varepsilon}(L)}{4\kappa_0^2} G(z; L, q) G(z_0; L, q),$$

$$G(z, z_0; q, L) |_{L=z_0} = G(z; z_0, q) / 2i\kappa_0, \quad z < z_0,$$

$$G(z, z_0; q, L) |_{L=z} = G(z_0; z, q) / 2i\kappa_0, \quad z > z_0,$$



Фиг. 2. Схема введения параметров погружения для уравнения (13). В области (2) — $\varepsilon = \kappa_2^2 - \kappa_0^2$, в (3) — $\varepsilon = k_0^2 \varepsilon(z)$, в (4) — $\varepsilon = \kappa_1^2 - \kappa_0^2$, в областях (1), (5) — $\varepsilon = 0$.

(14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} G(z; L, q) &= [i\kappa_0 + i(2\kappa_0)^{-1}\bar{\varepsilon}(L)G(L, q)]G(z; L, q), \\ G(z; L, q)|_{L=z} &= G(z, q), \\ \frac{\partial}{\partial L} G(L, q) &= 2i\kappa_0[G(L, q) - 1] + i\bar{\varepsilon}(L)(2\kappa_0)^{-1}G^2(L, q), \\ G(L_0, q) &= 1. \end{aligned}$$

Решения первых двух уравнений легко выражаются через функцию $G(L, q)$, удовлетворяющую последнему уравнению системы (14).

Перейдем к пределу $L_0 \rightarrow -\infty$, тогда при $L < 0$ получаем

$$(15) \quad G(L, q) = G_0 = 2\kappa_0(\kappa_0 + \kappa_2)^{-1}.$$

Если $0 < L < H$, нужно найти решение третьего уравнения системы (14)

$$(14') \quad \frac{\partial}{\partial L} G(L, q) = 2i\kappa_0[G(L, q) - 1] + \frac{ik_0^2}{2\kappa_0} \varepsilon(L)G^2(L, q)$$

с граничным условием $G(L, q) = G_0$ при $L = 0$. Обозначим это решение G_L , тогда при $L > H$ находим

$$(16) \quad G_L = \frac{G_1 - G_2 E \exp[2i\kappa_1(L-H)]}{1 - E \exp[2i\kappa_1(L-H)]},$$

где $G_1 = 2\kappa_0(\kappa_0 + \kappa_1)^{-1}$, $G_2 = 2\kappa_0(\kappa_0 - \kappa_1)^{-1}$, $E = (G_H - G_1)(G_H - G_2)^{-1}$.

С помощью функции G_L легко получить решение второго уравнения системы (14). При $L \leq H$

$$(17) \quad G(z; L, q) = G_z \exp \left[i\kappa_0(L-z) + \frac{ik_0^2}{2\kappa_0} \int_z^L d\eta \varepsilon(\eta) G_\eta \right],$$

а при $L > H$

$$G(z; L, q) = G(z; H, q) \frac{(1-E) \exp[i\kappa_1(L-H)]}{1 - E \exp[2i\kappa_1(L-H)]}.$$

Выражение (17) можно переписать также в виде

$$(18) \quad G(z; L, q) = G_z F(z; L, q),$$

где

$$\begin{aligned} F(z; L, q) &= \exp \left[i\kappa_0(L-z) + \frac{ik_0^2}{2\kappa_0} \int_z^L d\eta \varepsilon(\eta) G_\eta \right] = \\ &= \frac{G_L}{G_z} \exp \left[i\kappa_0 \int_z^L d\eta \frac{2 - G_\eta}{G_\eta} \right]. \end{aligned}$$

Переходя к пределу $L \rightarrow \infty$, получаем из первого уравнения системы (14) для $z > z_0$ $G_\infty(z, z_0; q) = (2i\kappa_0)^{-1} \bar{G}_\infty(z, z_0; q)$, где

$$\begin{aligned} \bar{G}_\infty(z, z_0; q) &= G(z_0; z, q) + \frac{i}{2\kappa_0} \int_z^\infty d\xi \bar{\varepsilon}(\xi) G(z; \xi, q) G(z_0; \xi, q) = \\ &= G(z_0; z, q) + \frac{ik_0^2}{2\kappa_0} \int_z^H d\xi \varepsilon(\xi) G(z; \xi, q) G(z_0; \xi, q) + \\ &+ \frac{G(z; H, q) G(z_0; H, q)}{G_2 - G_H} = G_{z_0} F(z_0; z, q) \left\{ 1 + \right. \\ &\left. + G_z \frac{ik_0^2}{2\kappa_0} \int_z^H d\xi \varepsilon(\xi) F^2(z; \xi, q) + \frac{G_z F^2(z; H, q)}{G_2 - G_H} \right\}. \end{aligned}$$

Для случая $z < z_0$ выражение для $G_\infty(z, z_0; q)$ можно найти, поменяв местами z и z_0 в формуле (19).

Таким образом, искомая функция $G_\infty(z, z_0; q)$ с помощью квадратур выражается через решение G_z уравнения Риккати (14'). Из формулы (19) видно, что влияние границ раздела, соответствующих $z=0$ и $z=H$, проявляется различным образом. Влияние границы при $z=0$ существенно для начального условия к уравнению (14'), причем

$$G_0 = 1 + V_2, \quad V_2 = (\kappa_0 - \kappa_2) / (\kappa_0 + \kappa_2),$$

где V_2 — коэффициент отражения плоской волны от полупространства $z < 0$ [7]. Граница при $z=H$ непосредственно сказывается на величине последнего слагаемого в правой части (19). Входящую туда величину G_2 можно представить в виде

$$G_2 = 1 + V_1^{-1}, \quad V_1 = (\kappa_0 - \kappa_1) / (\kappa_0 + \kappa_1),$$

где V_1 — коэффициент отражения плоской волны от полупространства $z > H$. При $H \rightarrow \infty$ последнее слагаемое в (19) исчезает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акустика океана. Сб. статей/Под ред. Бреховских Л. М. М.: Наука, 1974.
2. Распространение волн и подводная акустика. М.: Мир, 1980.
3. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
4. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И. Флуктуации интенсивности волны в одномерной случайно-неоднородной среде. IV. Инвариантное погружение и распределение вероятностей для интенсивности. — Изв. вузов. Радиофизика, 1980, т. 23, № 10, с. 1185–1194.
5. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я. Теория инвариантного погружения и волны в статистически неоднородных средах. — Докл. АН СССР, 1980, т. 250, № 5, с. 1112–1115.
6. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я. О краевых задачах для волнового уравнения. — Акуст. ж., 1982, т. 28, № 1, с. 1–7.
7. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.

Тихоокеанский океанологический институт
Дальневосточного научного центра
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
5.III.1981