АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVIII 1982 Вып. 3

УДК 534.222

О ВЫЧИСЛЕНИИ АМПЛИТУД НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ ВОЛНОВОДАХ

Лысанов Ю. П.

Предложен простой метод нахождения амплитуд нормальных волн в слоистых волноводах, основанный на использовании обобщенного соотношения ортогональности для «вертикальных» собственных функций рассматриваемой краевой задачи.

В работе [1] предложен метод нахождения амплитуд нормальных волн в слоистом волноводе с абсолютно отражающими границами, основанный на использовании соотношения ортогональности для нормальных волн. Ниже дано обобщение на случай, когда одна из границ является частично отражающей. Особенность этого случая заключается в наличии наряду с дискретным и сплошного спектра собственных значений.

Рассмотрим в цилиндрической системе координат r, z слой толщиной h: $0\leqslant z\leqslant h$, $0\leqslant r<\infty$, заполненный жидкой средой с плотностью ρ_1 и скоростью звука $c_1(z)$, $c_2(z)\to c_\infty=\text{const}$ при $z\to\infty$. Пусть слой расположен на жидком полупространстве $z>h$ с параметрами ρ_2, $c_2(z)$. Верхнюю границу слоя $z=0$ считаем свободной. Если точечный ненаправленный гармонический источник звука расположен в точке $r=0$, $z=z_1$, $z_1<h$, то звуковые давления $p_1(r, z)$ в слое и $p_2(r, z)$ в нижнем полупространстве удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$[\Delta+k_1^2(z)]\,p_1(r,z)=-(2/r)\,\delta(r)\,\delta(z-z_1), \tag{1}$$

$$[\Delta+k_2^2(z)]\,p_2(r,z)=0,\qquad k_{1,2}(z)=\omega/c_{1,2}(z), \tag{2}$$

$$\Delta=\partial_{rr}+r^{-1}\partial_r+\partial_{zz},$$

где $\delta(z)$ и $\delta(r)$ — одномерная и двумерная дельта-функция соответственно, и граничным условиям

$$p_1(r,0)=0, \tag{3}$$

$$p_1(r,h)=p_2(r,h),\qquad \rho_1^{-1}\partial_z p_1(r,h)=\rho_2^{-1}\partial_z p_2(r,h), \tag{4}$$

$$\lim_{z\to\infty} p_2(r,z)=0,\quad \operatorname{Im} k_2>0. \tag{5}$$

Решения уравнения (1) без правой части и уравнения (2), описывающие уходящие от источника волны, имеют вид

$$p_{1,2}(r,z)=F^{(1,2)}(z,\xi)\,H_0^{(1)}(\xi r), \tag{6}$$

где $H_0^{(1)}(\xi r)$ — функция Ханкеля первого рода, $-\xi^2$ — параметр разделения. Функции $F^{(1,2)}(z)$ удовлетворяют уравнению (для краткости аргумент ξ иногда опускается)

$$\partial_{zz}F^{(1,2)}(z)+[k_{1,2}^2(z)-\xi^2]\,F^{(1,2)}(z)=0 \tag{7}$$

и граничным условиям

$$F^{(1)}(0)=0, \tag{8}$$

$$F^{(1)}(h)=F^{(2)}(h),\qquad \rho_1^{-1}\partial_z F^{(1)}(h)=\rho_2^{-1}\partial_z F^{(2)}(h), \tag{9}$$

$$\lim_{z\to\infty}F^{(2)}(z)=0,\quad \operatorname{Im} k_2>0. \tag{10}$$

Положив

$$(11)\qquad F^{(1,2)}(z,\xi)=A^{(1,2)}\Phi^{(1,2)}(z,\xi),$$

где $\Phi^{(1)}(z,\xi)$ удовлетворяет условию (8), а $\Phi^{(2)}(z,\xi)$ — условию (10), $A^{(1,2)}$ — константы, и подставив (11) в (9), получаем дисперсионное уравнение для определения допустимых значений ξ:

$$(12)\qquad m\Phi^{(2)}(h,\xi)\,\partial_z\Phi^{(1)}(h,\xi)=\Phi^{(1)}(h,\xi)\,\partial_z\Phi^{(2)}(h,\xi),$$

$$m=\rho_2/\rho_1.$$

Обозначим через ξ_l ($l=0,1,2,\ldots$) корни уравнения (12) (дискретный спектр собственных значений). В рассматриваемом случае имеется и сплошной спектр собственных значений ξ_ν, где индекс ν пробегает непрерывный ряд значений. В силу этого выражение для $p_{1,2}(r,z)$ будет иметь вид

$$(13)\qquad p_{1,2}(r,z)=\sum_l F_l^{(1,2)}(z)H_0^{(1)}(\xi_l r)+$$

$$+\int F_\nu^{(1,2)}(z)H_0^{(1)}(\xi_\nu r)\,d\xi_\nu\quad F_{l,\nu}^{(1,2)}(z)=F^{(1,2)}(z,\xi_{l,\nu}),$$

где $F_l^{(1,2)}(z)$ и $F_\nu^{(1,2)}(z)$ — вертикальные собственные функции дискретного и сплошного спектров соответственно (латинскими индексами отмечаются собственные функции дискретного спектра, греческими — сплошного спектра).

Подставив $p_1(r,z)$ в (1), а $p_2(r,z)$ в (2) и учтя соотношение [1]

$$(\partial_{rr}+r^{-1}\partial_r+\xi_{l,\nu}^2)H_0^{(1)}(\xi_{l,\nu}r)=\frac{2i}{\pi r}\delta(r),$$

получаем

$$(14)\qquad \sum_l F_l^{(1)}(z)+\int F_\nu^{(1)}(z)\,d\xi_\nu=\pi i\delta(z-z_1),$$

$$(15)\qquad \sum_l F_l^{(2)}(z)+\int F_\nu^{(2)}(z)\,d\xi_\nu=0.$$

Для нахождения амплитуд нормальных волн $A_l^{(1,2)}=A^{(1,2)}(\xi_l)$ воспользуемся обобщенным соотношением ортогональности

$$(16)\qquad \int_0^h F_l^{(1)}(z)F_{n,\nu}^{(1)}(z)\,dz+m^{-1}\int_h^\infty F_l^{(2)}(z)F_{n,\nu}^{(2)}(z)\,dz=0,$$

$$l\neq n,\nu$$

(оно получается стандартным для задачи Штурма — Лиувилля способом — см. [2], гл. 6).

Далее умножим (14) на $F_n(z)$ и проинтегрируем по z от 0 до h, а (15) умножим на $m^{-1}F_n^{(2)}(z)$ и проинтегрируем по z от h до ∞ и результаты сложим. Тогда на основании (16) находим

$$(17)\qquad \int_0 [F_l^{(1)}(z)]^2dz+m^{-1}\int_h^\infty [F_l^{(2)}(z)]^2dz=\pi iF_l^{(1)}(z_1).$$

Подставив

$$F_l^{(1,2)}(z)=A_l^{(1,2)}\Phi_l^{(1,2)}(z),\quad \Phi_l^{(1,2)}(z)=\Phi^{(1,2)}(z,\xi_l)$$

в (17) и учтя, что, согласно (9),

$$A_l^{(2)}=A_l^{(1)}\Phi_l^{(1)}(h)/\Phi_l^{(2)}(h), \tag{18}$$

окончательно получаем

$$A_l^{(1)}=\pi i\Phi_l^{(1)}(z_1)\left\{\int_0^h[\Phi_l^{(1)}(z)]^2dz+\right. \tag{19}$$

$$\left.+m^{-1}[\Phi_l^{(1)}(h)/\Phi_l^{(2)}(h)]^2\int_h^\infty[\Phi_l^{(2)}(z)]^2dz\right\}^{-1}.$$

Выражение для $A_l^{(2)}$ получается согласно (18). Таким образом, даже при наличии сплошного спектра использование соотношения (16) позволяет простым способом находить амплитуды нормальных волн.

В качестве примера применим формулу (19) для нахождения амплитуд нормальных волн в однородном слое (k_1=const), лежащем на однородном полупространстве (k_2=const). В этом случае собственными функциями дискретного спектра являются

$$\Phi^{(1)}(z)=\sin\alpha_1 z,\qquad \Phi^{(2)}(z)=\exp[i\alpha_2(z-h)], \tag{20}$$

где

$$\alpha_{1,2}=(k_{1,2}^2-\xi^2)^{1/2}.$$

Дисперсионное уравнение (12) принимает вид

$$\operatorname{tg}x+mx(\mu^2-x^2)^{-1/2}=0, \tag{21}$$

где обозначено

$$x=\alpha_1 h,\qquad \mu=k_1h(1-n^2)^{1/2},\qquad n=k_2/k_1.$$

Подставив (20) в (19) при $x=x_l$, где x_l — корни уравнения (21), и используя (21), находим

$$A_l^{(1)}=\frac{2\pi i}{h}\frac{\sin(x_l z_1/h)}{1-(\mu/mx_l)^2(1/x_l)\operatorname{tg}x_l\sin^2 x_l},$$

что тождественно совпадает с выражением, полученным в работе [3, § 37].

Автор благодарен Л. М. Бреховских, А. Г. Вороновичу и В. В. Гончарову за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алувэлья Д. С., Келлер Дж. Б.* Точные и асимптотические представления звукового поля в стратифицированном океане. В кн.: Распространение волн и подводная акустика. / Под ред. Дж. Б. Келлера и Дж. С. Пападакиса, с. 20–75. Пер. с англ., Мир, М.: 1980.
2. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Изд-во иностр. лит., М.: 1958.
3. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. Наука, М.: 1973.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10.III.1981