чаем с учетом цилиндрической формы камеры следующее выражение для звукового давления:

$$p=(\gamma P_0 A/L)\sin\omega t, \tag{3}$$

где γ – показатель адиабаты, P_0 – атмосферное давление, L – длина камеры при $A=0$.

На основании (2) колебательные скорости поршней равны

$$\begin{aligned} v_2&=\dot{X}_2=\omega\sqrt{B^2+A^2/4}\sin(\omega t+\alpha),\\ v_3&=\dot{X}_3=\omega\sqrt{B^2+A^2/4}\sin(\omega t-\alpha). \end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку для бегущей волны справедливо соотношение (1), то при амплитуде колебательной скорости $v_0=\omega B$ между амплитудами A и B должно выполняться (с учетом (3)) и того что $c^2=\gamma\cdot P_0/\rho$

$$\frac{A}{B}=-(\rho c\omega L/\gamma P_0)=-kL\approx 6\pi\cdot 10^{-3}Lf \tag{5}$$

где k – волновое число и соответствующие величины заменены их численными значениями для воздуха. Оценим величину (5) при условии, что верхняя частота f равна 15 Гц (что близко к границе рабочего диапазона заглушенных камер), а длина камеры L равна 0,4 м. Тогда получим $A/B=0{,}1$, $\operatorname{tg}\alpha=0{,}05$ и колебательные скорости обоих поршней, а следовательно, и объема воздуха между ними приближенно равны следующей величине:

$$v\approx\omega B\sin\omega t. \tag{6}$$

Соотношение (6) будет выполняться тем точнее, чем меньше длина камеры по сравнению с длиной волны. Например, при $A/B=0{,}1$, $L=0{,}4$ м и $f=15$ Гц получаем $\alpha\approx 2°$.

Из сравнения выражений (1), (3), (6) видно, что при выбранном законе движения и сдвиге фаз в положении поршней, равном 2α звуковое давление и колебательная скорость в камере синфазны, а их отношение численно равно импедансу бегущей волны. Кроме того, устанавливая соответствующие амплитуды колебаний и начальный сдвиг фаз в положении поршней, можно моделировать различные участки стоячей волны, а также ближнюю и дальнюю зоны низкочастотных полей акустических излучателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блинова Л. П., Колесников А. Е., Ланганс Л. Б.* Акустические измерения. М.: Изд-во стандартов, 1971, с. 61, 208.
2. *Балабанов А. А., Бейгель М. З., Зеликман М. Х., Портной Ю. В., Степанов Б. М.* Способ имитации свободно распространяющихся волн в ограниченном объеме.– Авт. свид. № 800930, опубликовано в Б. И. 1981, № 4.

Научно-исследовательский институт оптико-физических измерений

Поступила в редакцию 4.IX.1980

УДК 534.26

К ВОПРОСУ О РАССЕЯНИИ ЗВУКА ТЕЛАМИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Иткина Е. Б., Клещев А. А.

На примере сферы со смешанными граничными условиями (одна половина ее – мягкая, другая – жесткая, фиг. 1) сравним два метода решения задачи дифракции звука на подобном теле: вариационный метод (называемый также методом «неопределенных коэффициентов» или «наименьших квадратов» [1–5]) и метод функции Грина, предложенный в работе [6].

Применительно к сфере радиуса R (фиг. 1), облучаемой плоской монохроматической волной с потенциалом Φ_i и создающей потенциал Φ_S рассеянной волны, в вариационном методе составляется функционал G^N на основе граничных условий [5]:

$$G^N=k^2\int\limits_{S_1}|\Phi_i+\Phi_S|^2\,dS+\int\limits_{S_2}\left|\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}+\frac{\partial\Phi_S}{\partial r}\right|^2 dS, \tag{1}$$

где $$\Phi_S = \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{q=0}^{\nu} A_\nu^q P_\nu^q(\cos\theta)\, h_\nu^{(1)}(kr) \cos q\varphi;$$

A_ν^q – неизвестные коэффициенты разложений. В развернутом виде функционал G^N имеет вид

$$(2) \qquad G^N = k^2R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \Bigg\{ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} i^m (2m+1)\,\varepsilon_n \frac{(m-n)!}{(m+n)!} P_m^n(\cos\alpha) P_m^n(\cos\theta) \times$$

$$\times j_m(kR)\cos n\varphi + \sum_{\nu=0}^{N}\sum_{q=0}^{\nu} A_\nu^q P_\nu^q(\cos\theta)\, h_\nu^{(1)}(kR)\cos q\varphi \Bigg\} \times$$

$$\times \Bigg\{ \sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{m_1} (-i)^{m_1}(2m_1+1)\,\varepsilon_{n_1} \frac{(m_1-n_1)!}{(m_1+n_1)!} P_{m_1}^{n_1}(\cos\alpha) P_{m_1}^{n_1}(\cos\theta)\, j_{m_1}(kR)\cos n_1\varphi +$$

$$+ \sum_{\nu_1=0}^{N}\sum_{q_1=0}^{\nu_1} \bar{A}_{\nu_1}^{q_1} P_{\nu_1}^{q_1}(\cos\theta)\, h_{\nu_1}^{(2)}(kR)\cos q_1\varphi \Bigg\} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi +$$

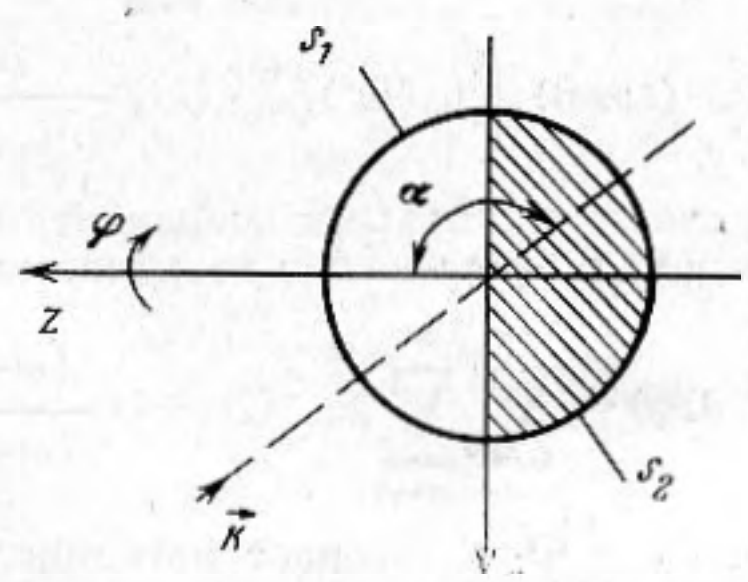
$$+ R^2 \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \Bigg\{ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} i^m (2m+1)\,\varepsilon_n \frac{(m-n)!}{(m+n)!} P_m^n(\cos\alpha) P_m^n(\cos\theta) \times$$

$$\times j_m'(kR)\, k\cos n\varphi + \sum_{\nu=0}^{N}\sum_{q=0}^{\nu} A_\nu^q P_\nu^q(\cos\theta)\, h_\nu^{(1)\prime}(kR)\, k\cos q\varphi \Bigg\} \times$$

$$\times \Bigg\{ \sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{m_1} (-i)^{m_1}(2m_1+1)\,\varepsilon_{n_1} \frac{(m_1-n_1)!}{(m_1+n_1)!} P_{m_1}^{n_1}(\cos\alpha) P_{m_1}^{n_1}(\cos\theta) \times$$

$$\times j_{m_1}'(kR)\, k\cos n\varphi + \sum_{\nu_1=0}^{N}\sum_{q_1=0}^{\nu_1} \bar{A}_{\nu_1}^{q_1} P_{\nu_1}^{q_1}(\cos\theta)\, h_{\nu_1}^{(2)\prime}(kR)\, k\cos q_1\varphi \Bigg\} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Здесь $P_m^n(\cos\theta)$ – присоединенный полином Лежандра, $j_m(kR)$ – сферическая функция Бесселя, $h_m^{(1),(2)}(kr)$ – сферические функции Ханкеля 1-го и 2-го рода соответственно, $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина звуковой волны в жидкости, $\varepsilon_n=1$



Фиг. 1. Сфера со смешанными граничными условиями

при $n=0$ и 2 при $n\neq 0$, α – угол между волновым вектором К падающей волны и осью z (фиг. 1), черта над неизвестным коэффициентом означает знак комплексного сопряжения.

Условие минимизации функционала обеспечивает наиболее удовлетворительное выполнение граничных условий на поверхности рассеивателя:

$$(3) \qquad \partial G^N / \partial \bar{A}_i^i = 0.$$

Подставляя (2) в (3), получим систему уравнений для определения коэффициентов A_ν^q

$$\sum_{\nu=0}^{N}\sum_{q=0}^{M} A_\nu^q C_{\nu\nu_1}^{qq} = -\sum_{m=0}^{N}\sum_{q=0}^{M} d_{m\nu_1}^{qq}. \tag{4}$$

Здесь

$$C_{\nu\nu_1}^{qq} = h_\nu^{(1)}(kR)\,h_{\nu_1}^{(2)}(kR)\,\Delta q \int_0^{\pi/2} P_\nu^q(\cos\theta)\,P_{\nu_1}^q(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta +$$

$$+ h_\nu^{(1)'}(kR)\,h_{\nu_1}^{(2)'}(kR)\,\Delta q \int_{\pi/2}^{\pi} P_\nu^q(\cos\theta)\,P_{\nu_1}^q(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta;$$

$$d_{m\nu_1}^{qq} = 2i^m(2m+1)\,\frac{(m-q)!}{(m+q)!}\,P_m^q(\cos\alpha)\times$$

$$\times\left[j_m(kR)\,h_{\nu_1}^{(2)}(kR)\int_0^{\pi/2} P_m^q(\cos\theta)\,P_{\nu_1}^q(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta +\right.$$

$$\left.+ j_m'(kR)\,h_{\nu_1}^{(2)'}(kR)\int_{\pi/2}^{\pi} P_m^q(\cos\theta)\,P_{\nu_1}^q(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\right];$$

$$\Delta q = \begin{cases} 2, & q_1=0 \\ 1, & q_1\neq 0 \end{cases}.$$

Метод функций Грина [6] заключается в том, что потенциал волны, рассеянной сферой со смешанными граничными условиями, приближенно записывается в виде следующей явной формулы:

$$\Phi_S(P) = \frac{1}{4\pi}\left[-\int_{S_1}\Phi_i(Q)\,\frac{\partial G_1(P,Q)}{\partial r}\,dS_1 +\right. \tag{5}$$

$$\left.+\int_{S_2}\frac{\partial\Phi_i(Q)}{\partial r}\,G_2(P,Q)\,dS_2\right],$$

где G_1, G_2 – функции Грина мягкой и жесткой сферы соответственно.

$$G_1(r,\theta,\varphi;r_1',\theta_0,\varphi_0) = ik\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}\varepsilon_n(2m+1)\,\frac{(m-n)!}{(m+n)!}\cos n(\varphi-\varphi_0)\times$$

$$\times P_m^n(\cos\theta_0)\,P_m^n(\cos\theta)\left[j_m(kr')\,h_m^{(1)}(kr) - \frac{j_m(kR)}{h_m^{(1)}(kR)}\,h_m^{(1)}(kr')\,h_m^{(1)}(kr)\right];$$

$$G_2(r,\theta,\varphi;r',\theta_0,\varphi_0) = ik\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}\varepsilon_n(2m+1)\,\frac{(m-n)!}{(m+n)!}\cos n(\varphi-\varphi_0)\,P_m^n(\cos\theta_0)\times$$

$$\times P_m^n(\cos\theta)\left[j_m(kr')\,h_m^{(1)}(kr) - \frac{j_m'(kR)}{h_m^{(1)'}(kR)}\,h_m^{(1)}(kr')\,h_m^{(1)}(kr)\right];$$

Q – точка поверхности с угловыми координатами φ_0, θ_0 и радиальной координатой r', P – точка наблюдения, сферические координаты ее φ, θ, r;

$$\Phi_i(r,\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}\varepsilon_n i^m(2m+1)\,\frac{(m-n)!}{(m+n)!}\,P_m^n(\cos\alpha)\,P_m^n(\cos\theta)\,j_m(kr)\cos n\varphi.$$

Подстановка G_1, G_2 и Φ_i в (5) дает потенциал рассеянной волны Φ_S в замкнутом виде; если половина сферы – жесткая, а другая половина – мягкая, то

$$\Phi_S(r,\theta,\varphi) = \frac{k^2R^2}{2}\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}(-1)^n i^{m_1+1}(2m_1+1)(2m+1)\,\frac{(m_1-n)!}{(m_1+n)!}\times \tag{6}$$

$$\times\frac{(m-n)!}{(m+n)!}\,\varepsilon_n P_m^n(\cos\theta)\,P_{m_1}^n(\cos\alpha)\,h_m^{(1)}(kr)\left\{-j_{m_1}(kR)\times\right.$$

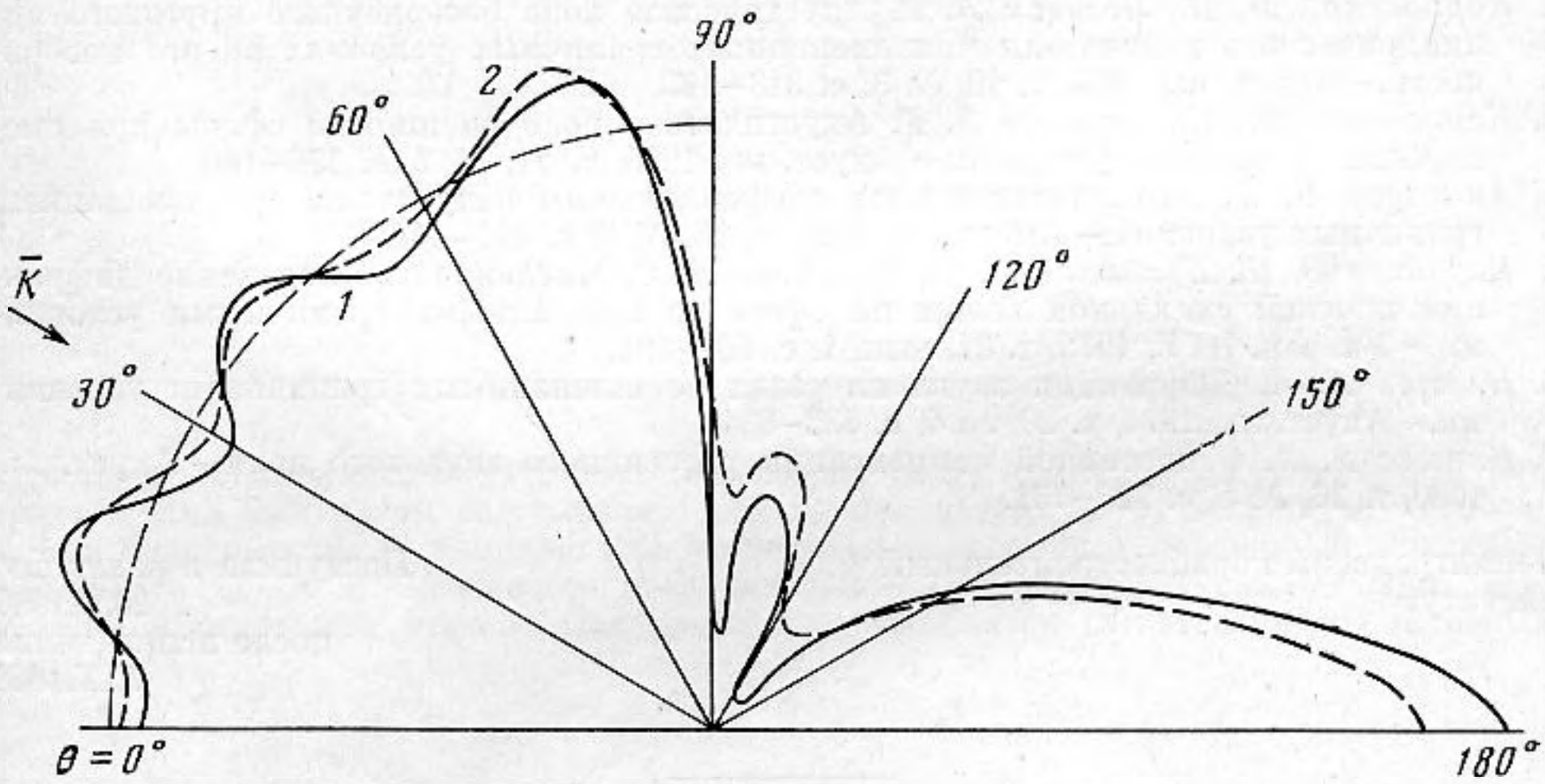
$$\times \left[j_m'(kR) - \frac{j_m(kR)}{h_m^{(1)}(kR)} h_m^{(1)'}(kR) \right] \int_0^{\pi/2} P_m^n(\cos\theta_0) P_{m_1}^n(\cos\theta_0) \times$$

$$\times \sin\theta_0 \, d\theta_0 + j_{m_1}'(kR) \left[j_m(kR) - \frac{j_m'(kR)}{h_m^{(1)'}(kR)} h_m^{(1)}(kR) \right] \times$$

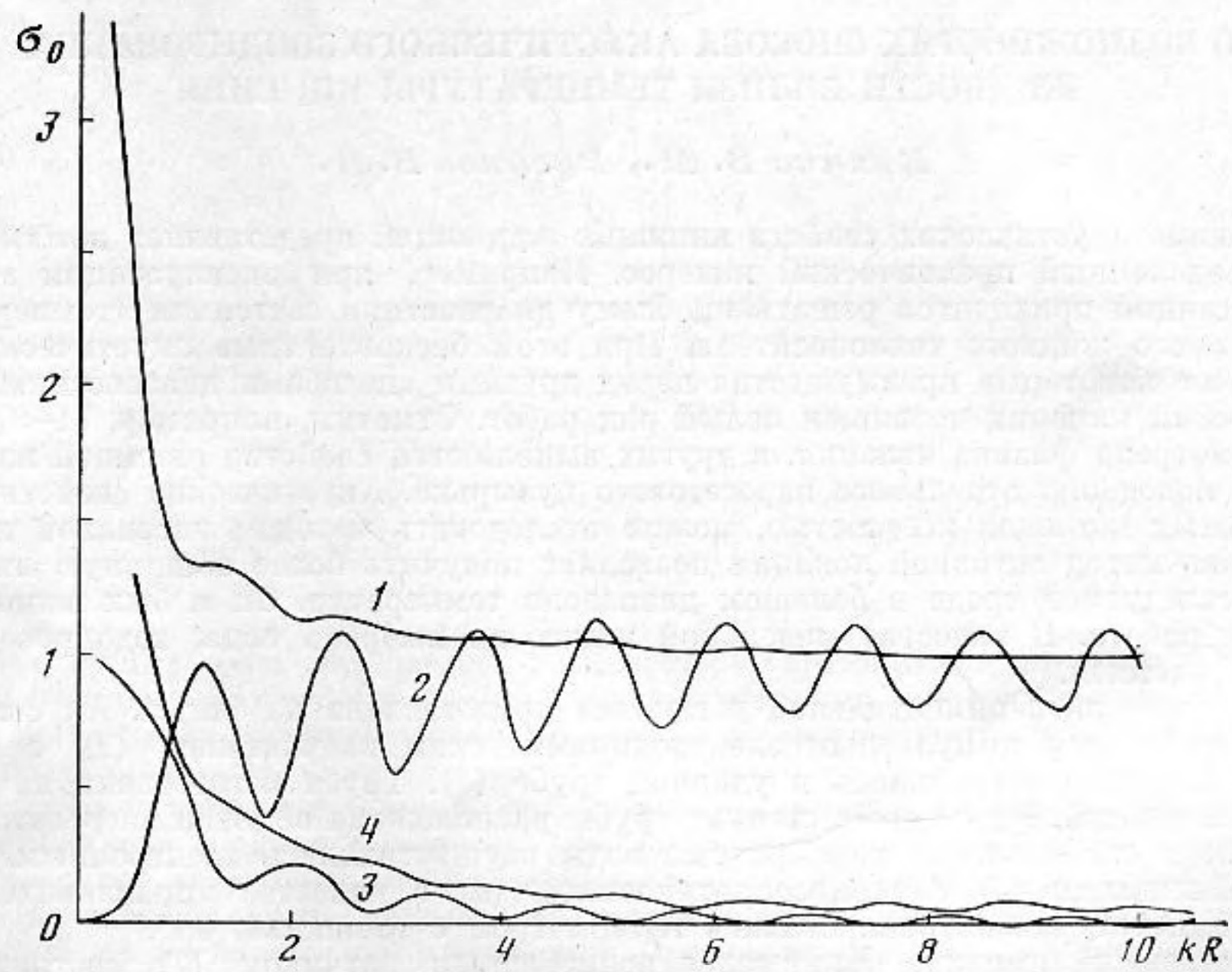
$$\times \int_{\pi/2}^{\pi} P_m^n(\cos\theta_0) P_{m_1}^n(\cos\theta_0) \sin\theta_0 \, d\theta_0 \Bigg\} .$$

В процессе сравнения обоих методов был выполнен большой объем расчетов рассеянного поля (ближнего и дальнего) в диапазоне волновых размеров $kR=0{,}5 \div 10{,}0$ с шагом $\Delta kR=0{,}5$ при углах облучения $\alpha=30$, 60, 90°.

На фиг. 2 сравниваются распределения $|\Phi_S|$ на поверхности сферы при $kR=7$, $\alpha=30°$. Идеально мягкая часть сферы соответствует изменению угла θ в пределах



Фиг. 2. Распределение $|\Phi_S|$ на сфере со смешанными граничными условиями ($\alpha=30°$, $kR=7$)



Фиг. 3. Частотный спектр относительных сечений обратного рассеяния σ_0

от 0 до 90°, единичный потенциал показан на графиках пунктирной дугой, $|\Phi_S|$ по методу функций Грина показан кривой *1*, по вариационному методу – кривой *2*.

Близкие результаты дают оба метода и при вычислении сечения обратного рассеяния σ_0 при $\alpha=90°$ (фиг. 3). Кривая *1* этой фигуры относится к однородной мягкой сфере, *2* – к однородной жесткой сфере, *3* – к методу функций Грина, *4* – к вариационному методу.

Анализ представленных результатов указывает на компенсацию рассеянного поля в направлении на источник, что раньше отмечалось у сфероидов со смешанными условиями [6, 7]. С другой стороны, метод функций Грина дает значения σ_0, близкие к вариационному методу, начиная с $kR\simeq3{,}0$ и выше.

В заключение следует сказать, что вариационный метод является принципиально точным [2], т. е. с ростом числа неизвестных коэффициентов решение сходится к точному решению задачи дифракции.

Авторы выражают благодарность Э. П. Бабайлову за помощь в составлении алгоритмов расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зоммерфельд А.* Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
2. *Карновский М. И., Лозовик В. Г.* Акустическое поле бесконечного кругового цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности.– Акуст. ж., 1964, т. 10, № 3, с. 313–317.
3. *Карновский М. И., Лозовик В. Г.* Акустическое поле внешности сферы при смешанных граничных условиях.– Акуст. ж., 1965, т. 11, № 2, с. 176–180.
4. *Андебура В. А.* Акустическое поле сфероидального излучателя при смешанных граничных условиях.– Акуст. ж., 1969, т. 15, № 3, с. 441–444.
5. *Бабайлов Э. П., Брайнина Л. С., Рузанова Н. С.* Численное исследование дифракции плоской скалярной волны на сфере со смешанными граничными условиями.– Уч. зап. ПГУ, 1975, т. 21, вып. 1, с. 156–164.
6. *Клещев А. А.* Дифракция звука на телах со смешанными граничными условиями.– Акуст. ж., 1974, т. 20, № 4, с. 632–634.
7. *Клещев А. А.* О пассивной компенсации рассеянного звукового поля.– Акуст. ж., 1980, т. 26, № 5, с. 726–731.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила в редакцию
20.V.1980
после исправления
7.IX.1981

УДК 534.6:536.423.1

О ВОЗМОЖНОСТЯХ СПОСОБА АКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ТЕМПЕРАТУРЫ КИПЕНИЯ

Крячко В. М., Русаков В. П.

Изучение акустических свойств кипящих жидкостей представляет помимо научного определенный практический интерес. Например, при эксплуатации атомных электростанций приходится решать проблему диагностики состояния (температуры) используемого жидкого теплоносителя. При этом бесконтактные акустические способы имеют некоторые преимущества перед другими способами диагностики.

Вопросам кипения посвящен целый ряд работ. Отметим, например, [1–3]. В одних рассмотрена физика явления, в других выявляются свойства кипящей жидкости с учетом поведения отдельного парогазового пузырька. Акустические свойства объемов, занятых кипящей жидкостью, можно исследовать методом пассивной локации [4]. Однако метод активной локации позволяет получить более обширную информацию о исследуемой среде в большом диапазоне температур. Он и был использован в данной работе. В качестве модельной жидкости выбрана вода, водопроводная и дистиллированная.

Блок-схема экспериментальной установки представлена на фиг. 1. Акустическая волна, создаваемая импульсным электродинамическим излучателем (*1*) с блоком питания (*2*), распространялась в ударной трубе (*3*). Труба изготовлена из латуни и заполнена водой. На боковых стенках трубы расположена обмотка нагревателя (*4*). Изменение и стабилизация температуры воды осуществлялись электронным блоком термостабилизации (*5*) с термосопротивлением (*6*) в качестве управляющего элемента. Температура контролировалась термометром с точностью 0,1°.

Акустический импульс принимался волноводным датчиком (*7*), состоящим из длинного латунного стержня диаметром 5 мм, к верхнему концу которого приклеена таблетка из пьезокерамики диаметром 5 и толщиной 3 мм. Боковая поверхность нижнего конца стержня, опускаемого в воду, окружена слоем воздуха с помощью тонкой металлической трубки, так что с водой контактирует только торец стержня.