АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXVIII 1982 Вып. 4

УДК 534.26

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ НЕРОВНОСТЕЙ ГРАНИЦЫ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН В ПОВЕРХНОСТНУЮ РЭЛЕЕВСКУЮ

Лапин А. Д.

Исследовано преобразование объемных волн в поверхностную на неровной границе твердого тела.

В работе [1] рассмотрена двумерная задача о генерации поверхностной рэлеевской волны при наклонном падении объемных волн на периодически неровную границу твердого тела, описываемую уравнением $z=\zeta(x)$. Согласно соотношению Брэгга, эффективное возбуждение рэлеевских волн происходит на неровностях с периодами, равными $2\pi/(p+\xi)$ и $2\pi/(p-\xi)$, где p — волновое число рэлеевской волны, ξ — проекция волнового вектора объемной волны на ось x. При $\xi>0$ эти неровности создают рэлеевские волны, бегущие соответственно в отрицательном и в положительном направлениях оси x. В работе [1] исследованы закономерности генерации рэлеевской волны на неровностях с периодом, равным $2\pi/(p+\xi)$, и показано, что для этих неровностей коэффициенты преобразования продольной и поперечной объемных волн в поверхностную определяются пространственной гармоникой с волновым числом, равным $(p+\xi)$, и не зависят от формы неровностей.

Представляет интерес исследовать преобразование волн на неровностях с периодом, равным $2\pi/(p-\xi)$. Поскольку пространственным гармоникам с волновыми числами, кратными $(p-\xi)$, могут соответствовать спектры, уносящие звуковую энергию от границы, то для этих периодических неровностей коэффициенты преобразования волн зависят от формы неровностей. Ниже соответственное исследование выполнено на основе модифицированной теории возмущений [2], учитывающей эффект многократного рассеяния.

Сформулируем задачу о преобразовании волн. Пусть граница твердое тело — вакуум описывается уравнениями $z=0$ при $|x|>L$ и $z=\zeta(x)$ при $|x|<L$, где $\zeta(x)$ — периодическая функция координаты x, $|p\zeta|\ll 1$, $|d\zeta/dx|\ll 1$, p — волновое число рэлеевской волны при частоте ω, ось z направлена в вакуум. Из твердой среды на неровную границу падают плоские гармонические продольная и поперечная волны с потенциалами

$$(1)\qquad \varphi_{\text{пад}}=A\exp[i(\xi x+\mu z)],\quad \psi_{\text{пад}}=B\exp[i(\xi x+\vartheta z)],$$

где $\xi>0$, $\mu=\sqrt{k^2-\xi^2}$, $\vartheta=\sqrt{\varkappa^2-\xi^2}$, k и $\varkappa$ — волновые числа продольной и поперечной волн, A и B — амплитуды этих волн. Мы выберем неровности с периодом, равным $2\pi/(p-\xi)$. Падающее поле (1) создает на этих периодических неровностях интенсивную поверхностную рэлеевскую волну, бегущую в положительном направлении оси x. Требуется рассчитать коэффициенты преобразования продольной и поперечной объемных волн в поверхностную и исследовать зависимости этих коэффициентов от угла падения объемных волн, формы неровностей и длины неровного участка.

Как показано в работе [1], скалярный потенциал генерируемой поверхностной рэлеевской волны определяется по формуле

$$(2)\qquad \varphi=-\frac{i\alpha\beta}{2pTU}\int\limits_{-L}^{L}\left\{(\beta^2+p^2)(AR_1+BS_1)\zeta(X)\pm i2p\beta\left[\left(AR_2+BS_2\right)\times\right.\right.$$

$$\times\zeta(X)+(AR_3+BS_3)\frac{d\zeta}{dX}\Big]\Big\}\exp\{i[\xi\mp(p+i\delta)]X\}dX\times$$
$$\times\exp(\pm ipx+\alpha z-\delta L),\quad |x|>L,$$

где

$$R_1=i\varkappa^4\mu(\vartheta^2-\xi^2),\quad R_2=i2\xi\mu\vartheta[(\vartheta^2-\xi^2)^2+4\xi^2\mu^2],$$
$$R_3=-8\xi^2\mu\vartheta(\varkappa^2-k^2),\quad S_1=i2\varkappa^4\xi\mu\vartheta,$$
$$S_2=-i\vartheta(\vartheta^2-\xi^2)[\varkappa^4-4\xi^2(\varkappa^2-k^2)],\quad S_3=4(\varkappa^2-k^2)(\vartheta^2-\xi^2)\xi\vartheta,$$
$$U=[(\vartheta^2-\xi^2)^2+4\xi^2\mu\vartheta],\quad \alpha=\sqrt{p^2-k^2},\quad \beta=\sqrt{p^2-\varkappa^2},$$
$$T=\{4p^4-3p^2(\varkappa^2+k^2)+2k^2\varkappa^2-2\alpha\beta(2p^2-\varkappa^2)\},$$

δ – коэффициент затухания рэлеевской волны, обусловленного рассеянием на неровностях [3]. В формуле (2) верхний и нижний знаки выбираются соответственно при $x>L$ и при $x<-L$. Амплитуда векторного потенциала поверхностной волны отличается от амплитуды ее скалярного потенциала лишь множителем $\pm i2p\alpha/(\beta^2+p^2)$, и поэтому мы не приводим его выражение.

Разделим неровный участок $(-L, L)$ на площадки с длинами, равными периоду неровностей. Каждая из этих площадок создает поверхностную волну справа от себя и не создает ее слева. Справа от неровного участка $(x>L)$ волны от всех площадок складываются синфазно, и поэтому при большой длине L возникает интенсивная поверхностная волна. Слева от неровного участка $(x<-L)$ поверхностная волна обусловлена краевым эффектом; ее амплитуда мала (порядка отношения высоты неровностей к длине поверхностной волны) и осциллирует с возрастанием L.

При $(p-\xi)L\gg 1$ основной вклад в поверхностную волну справа от неровного участка дает пространственная гармоника с волновым числом, равным $(p-\xi)$. Задав эту гармонику в виде $a_1\cos[(p-\xi)x+\Phi_1]$ и выполнив интегрирование в формуле (2), получим выражение

$$\varphi=\frac{\alpha\beta De^{i\Phi_1}}{2pTU}\{\mu\tau A+\nu\sigma B\}\exp(ipx+\alpha z),\quad x>L, \tag{3}$$

где

$$\tau=\{\varkappa^4(\beta^2+p^2)(\nu^2-\xi^2)-i4p\beta\xi\vartheta[4\xi p(\varkappa^2-k^2)-\varkappa^4]\}, \tag{4}$$
$$\sigma=2\{\varkappa^4(\beta^2+p^2)\xi\mu+ip\beta(\vartheta^2-\xi^2)[4\xi p(\varkappa^2-k^2)-\varkappa^4]\}, \tag{5}$$
$$D=\frac{a_1}{\delta}\operatorname{sh}(\delta L)e^{-\delta L}. \tag{6}$$

Коэффициент затухания δ зависит от формы периодических неровностей [3]. Представим функцию $\zeta(x)$ в виде суммы пространственных гармоник:

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos[n(p-\xi)x+\Phi_n],$$

где a_n и Φ_n – соответственно амплитуда и фаза n-й гармоники. Каждая пространственная гармоника неровностей, которой соответствует рассеянный однородный спектр, вносит свой вклад в затухание рэлеевской волны. Коэффициент затухания этой волны из-за рассеяния на n-й гармонике, обозначим его через δ_n, пропорционален a_n^2. При $n=1$ (основная гармоника) имеем выражение

$$\delta_1=\frac{\alpha a_1^2}{64\cdot p^3\cdot T\cdot|U|^2}\operatorname{Re}\{\mu|\tau|^2+\nu|\sigma|^2\}. \tag{7}$$

Коэффициент затухания рэлеевской волны, бегущей вдоль неровной границы $z=\zeta(x)$, получим по формуле

$$\delta=\sum_n\delta_n,$$

где суммирование производится по всем гармоникам, которым соответствуют рассеянные однородные спектры.

Рассчитаем коэффициенты преобразования продольной и поперечной объемных волн в поверхностную. Пусть из твердой среды с плотностью ρ на неровную границу падает продольная волна ($A\neq 0$, $B=0$). Поток энергии в этой волне через участок $(-L, L)$ границы равен

$$Q_{\text{пад}}=\omega\rho\mu|A|^2L.$$

Поток энергии в генерируемой поверхностной волне (3) будет

$$Q=\frac{\omega\rho}{4p\alpha\beta^2}T|N|^2,$$

где N — комплексная амплитуда этой волны, равная $\alpha\mu\beta\tau DA\exp(i\Phi_1)/$ $/(2pTU)$.

Коэффициент преобразования продольной объемной волны в поверхностную получим по формуле

$$\eta^{(\parallel)}=\frac{Q}{Q_{\text{пад}}}=\frac{\alpha\mu|\tau|^2}{16p^3T|U|^2}\frac{D^2}{L}.$$

При учете соотношения (6) эту формулу можно преобразовать к виду

$$\eta^{(\parallel)}=\frac{\alpha\mu|\tau|^2}{16p^3T|U|^2}\frac{a_1^2}{\delta}\frac{\operatorname{sh}^2(\delta L)}{(\delta L)}e^{-2\delta L}.$$

Зависимость коэффициента преобразования от длины $2L$ неровного участка характеризуется множителем $\dfrac{\operatorname{sh}^2(\delta L)}{(\delta L)}e^{-2\delta L}$. Этот множитель принимает максимальное значение, равное 0,2, при $2L=1{,}2/\delta$. При этой длине неровного участка коэффициент преобразования будет оптимальным:

(8) $$\eta_0^{(\parallel)}=\frac{\alpha\mu|\tau|^2}{80p^3T|U|^2}\frac{a_1^2}{\delta}.$$

Для чисто синусоидальных неровностей из этой формулы при учете соотношения (7) получим выражение

(9) $$\eta_{0c}^{(\parallel)}=\frac{\alpha\mu|\tau|^2}{80p^3T|U|^2}\frac{a_1^2}{\delta_1}=\frac{0{,}8\cdot\mu|\tau|^2}{\{\mu|\tau|^2+\nu|\sigma|^2\}}.$$

Формулу (8) можно преобразовать к виду $\eta_0^{(\parallel)}=\eta_{0c}^{(\parallel)}/\chi$, где

(10) $$\chi=\delta/\delta_1=\sum_n\delta_n/\delta_1\geqslant 1.$$

Безразмерная величина χ характеризует влияние формы периодических неровностей на преобразование объемной волны в поверхностную.

Аналогичным способом можно рассчитать коэффициент преобразования поперечной объемной волны ($A=0$, $B\neq 0$) в поверхностную. Этот коэффициент определяется по формуле

$$\eta^{(\perp)}=\frac{\alpha\nu|\sigma|^2}{16p^3T|U|^2}\frac{a_1^2}{\delta}\frac{\operatorname{sh}^2(\delta L)}{(\delta L)}e^{-2\delta L}.$$

При длине неровного участка, равной $1{,}2/\delta$, он будет оптимальным:

$$\eta_0^{(\perp)}=\frac{\alpha\nu|\sigma|^2}{80p^3T|U|^2}\frac{a_1^2}{\delta}=\eta_{0c}^{(\perp)}/\chi,$$

где

(11) $$\eta_{0c}^{(\perp)}=\frac{0{,}8\cdot\nu|\sigma|^2}{\operatorname{Re}\{\mu|\tau|^2+\nu|\sigma|^2\}}$$

—оптимальный коэффициент преобразования для чисто синусоидальных неровностей, величина χ определяется по формуле (10).

Согласно формулам (9) и (11), коэффициенты $\eta_{oc}^{(\parallel)}$ и $\eta_{oc}^{(\perp)}$ не зависят от амплитуды неровностей.

Исследуем эффективность преобразования волн на неровной границе в зависимости от угла падения объемной волны и от формы неровностей. С этой целью рассчитаем коэффициенты $\eta_{oc}^{(\parallel)}$, $\eta_{oc}^{(\perp)}$ и χ для стали ($\omega/k=5\cdot10^5$ см/с, $\omega/\varkappa=3{,}84\cdot10^5$ см/с). Расчет выполним соответственно по формулам (9), (11) и (10), где величины τ, σ и δ_1 определяются по формулам (4), (5) и (7).

На фиг. 1 даны зависимости оптимальных коэффициентов преобразования волн на синусоидальных неровностях от величины $\xi/\varkappa$, характеризующей угол падения объемной волны. Из анализа графиков следует что положения максимума и минимума коэффициента $\eta_{oc}^{(\parallel)}$ совпадают соответственно с положениями минимума и максимума коэффициента $\eta_{oc}^{(\perp)}$.

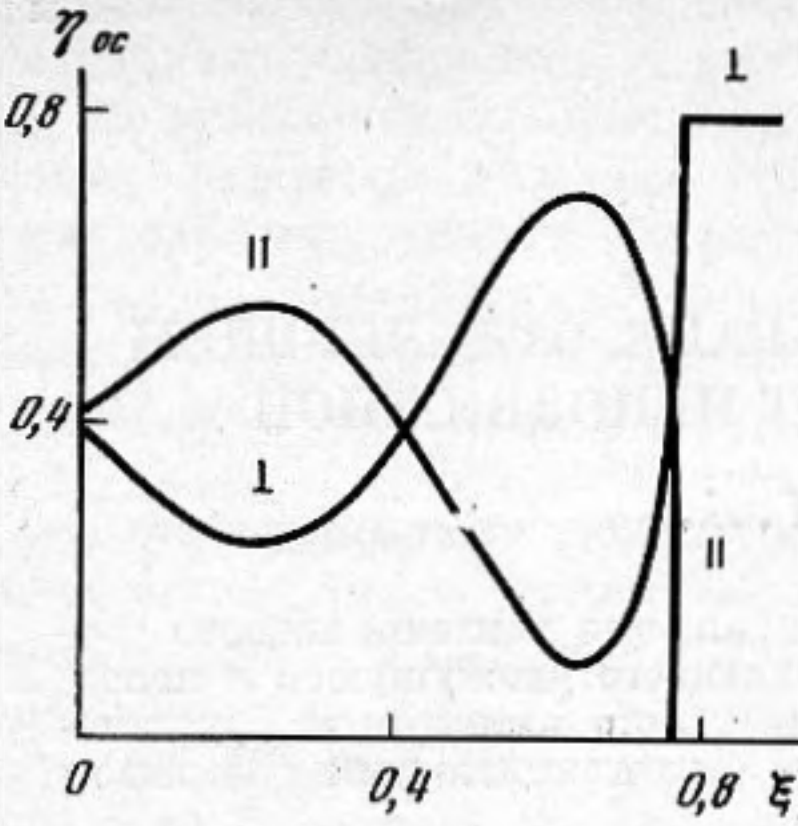
На фиг. 2 приведен график для нормированного коэффициента затухания поверхностной рэлеевской волны, распространяющейся вдоль неровной границы $z=a\cos(gx)$. По оси ординат отложена величина $\gamma=4\delta/\varkappa^3a^2$, по оси абсцисс — величина $g/\varkappa$. Кривая имеет острые максимумы при значениях g, удовлетворяющих уравнению $(p-g)=\pm k$. При этих значениях g рассеянная продольная волна распространяется вдоль плоскости $z=0$. Левый пик соответствует рассеянной продольной волне, распространяющейся в том же направлении, что и рэлеевская; правый (более высокий) пик соответствует рассеянной продольной волне, распространяющейся в обратном направлении. Резкое увеличение затухания рэлеевской волны при этих значениях g обусловлено оттоком энергии от границы в рассеянную поперечную волну [3].

При помощи графика, приведенного на фиг. 2, можно определить коэффициент затухания рэлеевской волны, обусловленного ее рассеянием на любой пространственной гармонике неровностей. В самом деле, положим $a=a_n$, $g=n(p-\xi)$ и тогда на графике сразу получим величину $\gamma_n=4\delta_n/(\varkappa^3a_n^2)$.

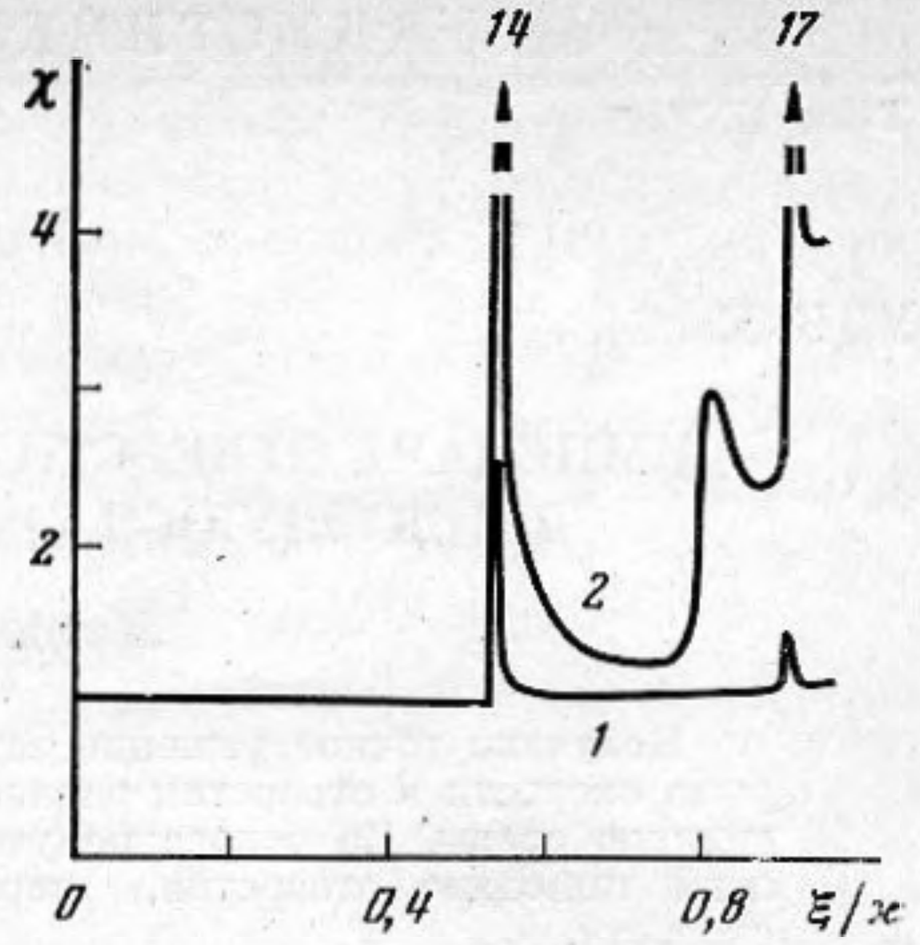
Влияние формы неровностей на эффективность преобразования волн характеризуется коэффициентом χ, определяемым по формуле (10). Эту формулу можно преобразовать к виду $\chi=\sum(a_n/a_1)^2\gamma_n/\gamma_1$, где величины γ_n определяются при помощи графика, приведенного на фиг. 2.

На фиг. 3 даны зависимости коэффициента χ от величины $\xi/\varkappa$ для пилообразных неровных границ. Кривая *1* соответствует границе с симметричными треугольными зубцами ($a_n/a_1=0{,}5[1+(-1)^{n+1}]/n^2$), кривая *2* — границе с прямоугольными зубцами ($a_n/a_1=0{,}5[1+(-1)^{n+1}]/n$). В интервале $0<\xi<(2p-\varkappa)/3$ затухание рэлеевской волны обусловлено ее рассеянием только на основной (первой) гармонике неровностей и поэтому в этом интервале коэффициент χ равен единице для обоих типов неровностей. При $\xi>(2p-\varkappa)/3$ третья и другие высшие гармоники неровностей вносят свой вклад в затухание рэлеевской волны. Поскольку отношение амплитуд a_n/a_1 для прямоугольных неровностей больше, чем для симметричных треугольных, то при $\xi>(2p-\varkappa)/3$ кривая *2* лежит выше кривой *1*. Обе кривые имеют острые максимумы при значениях ξ, удовлетворяющих уравнению $[p-n(p-\xi)]=\pm k$. При этих значениях ξ рассеянная продольная волна, обусловленная n-й гармоникой неровностей, бежит вдоль плоскости $z=0$. Оптимальный коэффициент преобразования объемной волны в поверхностную на периодически неровной несинусоидальной границе равен η_{oc}/χ.

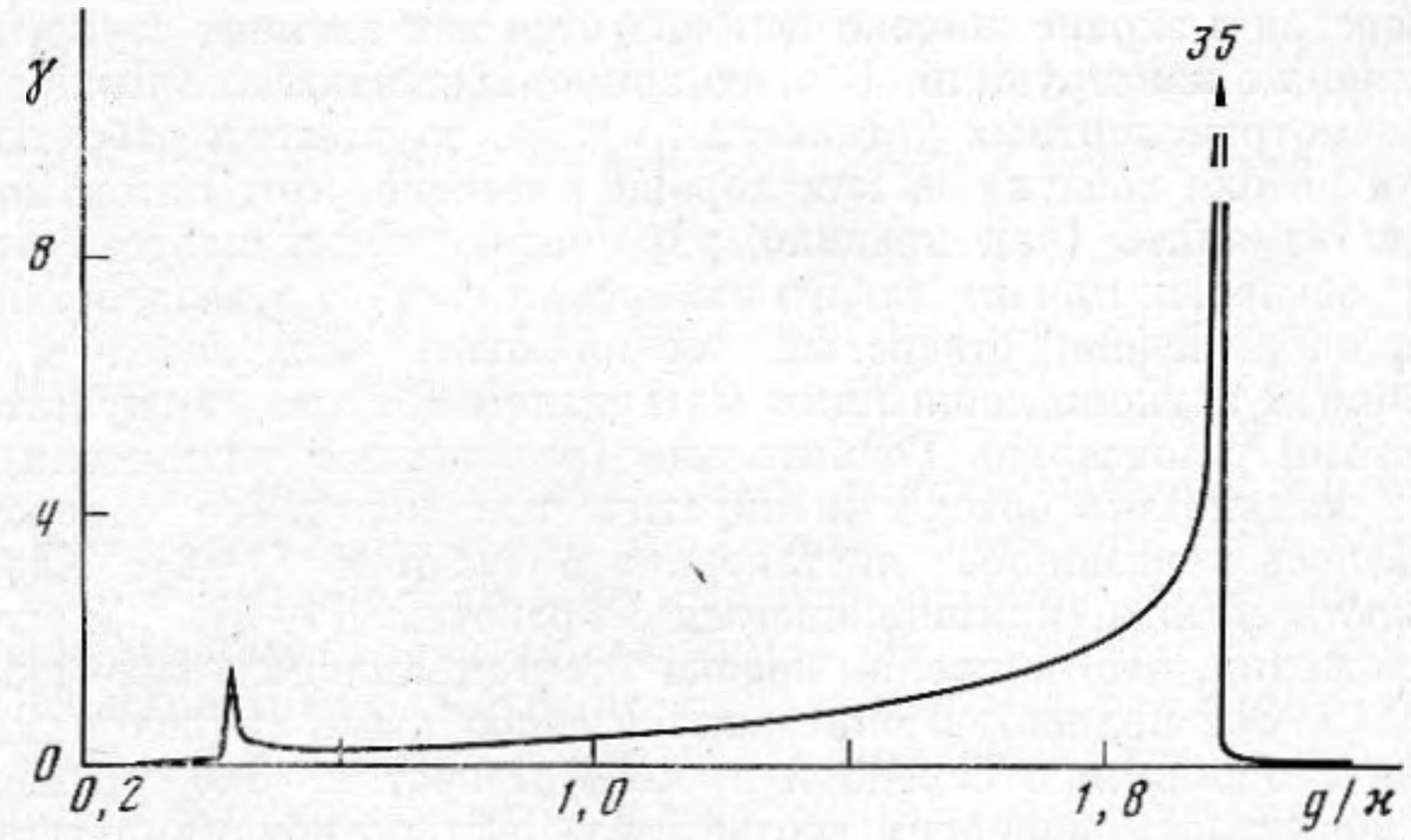
Все полученные результаты не применимы в интервале $0\leqslant\xi/\varkappa\leqslant(\varkappa a_1)^2$, т. е. при нормальном падении объемных волн и близких к нему. Согласно работам [4, 5], при расчете преобразования волн на периодических не-



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

Фиг. 1. Зависимости оптимальных коэффициентов преобразования продольной (‖) и поперечной (⊥) объемных волн на синусоидальных неровностях от величины $\xi/\varkappa$

Фиг. 2. Зависимость нормированного коэффициента затухания рэлеевской волны от величины $g/\varkappa$

Фиг. 3. Зависимости коэффициента χ от величины $\xi/\varkappa$ для пилообразных неровных границ с симметричными треугольными зубцами (кривая *1*) и с прямоугольными зубцами (кривая *2*)

ровностях с периодом, равным или близким длине поверхностной волны, необходимо учитывать и квадратичные по амплитуде неровностей эффекты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лапин А. Д.* Генерация поверхностной рэлеевской волны при наклонном падении объемных волн на неровную границу твердого тела.– Акуст. ж., 1982, т. 28, № 3, с. 359–363.
2. *Урусовский И. А.* О принципе локальности в теории рассеяния волн на неровных поверхностях.– В кн.: VI Всес. акуст. конф. М.: 1968, А' V 9.
3. *Бреховских Л. М.* О распространении поверхностных рэлеевских волн вдоль неровной границы упругого тела.– Акуст. ж., 1959, т. 5, № 3, с. 282–289.
4. *Гуляев Ю. В., Плесский В. П.* Затухание поверхностной акустической волны Рэлея при распространении вдоль периодически возмущенной границы упругого тела.– Физ. тв. тела, 1979, т. 21, № 11, с. 3479–3482.
5. *Гуляев Ю. В., Плесский В. П.* Взаимное преобразование объемных и поверхностных акустических волн на периодически возмущенном участке поверхности упругого тела (обзор).– Радиотехника и электроника, 1980, т. 25, № 8, с. 1569–1587.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
8.V.1981