

УДК 534.26

ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГОЙ ВОЛНЫ В АКУСТИЧЕСКИ АКТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ

Вужва А. Д.

Рассмотрен вопрос о генерации второй гармоники при распространении поперечных упругих волн вдоль оси третьего порядка в кристалле кварца. Показано, что наличие пространственной дисперсии, существенной для гиперзвуковых волн, приводит к нарушению условий фазового синхронизма.

Акустическая активность кристаллов [1-3] является одним из проявлений пространственной дисперсии, поэтому величина этого эффекта определяется параметром a/λ (a — период кристаллической решетки, λ — длина волны). Хотя даже для волн гиперзвуковых частот этот параметр является малым, наличие пространственной дисперсии может существенно изменить характер протекания нелинейных процессов. Особенно это относится к процессам когерентным, в частности к генерации гармоник.

Вопрос о генерации второй гармоники в акустически активном кристалле мы рассмотрим на примере кварца (класс симметрии 32). Кристалл кварца представляет в этом смысле интерес, во-первых, потому что при распространении поперечных волн вдоль оси третьего порядка (именно в этом случае проявляется эффект акустической активности) возможна генерация гармоник, во-вторых, потому что мы имеем возможность сделать количественные оценки, так как в кварце эффект акустической активности исследовался экспериментально [4, 5].

С учетом пространственной дисперсии в первом приближении по малому параметру a/λ и нелинейных членов, квадратичных по вектору упругого смещения, уравнения для распространения поперечных волн вдоль оси третьего порядка имеют вид

$$(1) \quad \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - C_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \gamma_{543} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} = -C_{444} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} \right),$$

$$(2) \quad \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - C_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \gamma_{543} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} = C_{444} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} \right).$$

Здесь u_1, u_2 — компоненты вектора упругого смещения, C_{44}, C_{444} — компоненты тензоров упругих модулей второго и третьего порядков, γ_{543} — компонента тензора акустической активности, ρ — плотность кристалла.

В линейном приближении (правая часть уравнений в этом случае равна нулю) решение представляет собой волны правой и левой круговой поляризации, распространяющиеся с различными фазовыми скоростями

$$(3) \quad v = v_0 \mp 0,5 (\gamma_{543}/C_{44}) \omega,$$

где $v_0 = (C_{44}/\rho)^{1/2}$, ω — частота. Волну линейной поляризации можно представить суперпозицией волн круговой поляризации. Фазовая скорость этой волны есть v_0 , а плоскость поляризации поворачивается по мере распространения вдоль кристалла. Угол поворота на единице длины

$$(4) \quad \Phi = 0,5 (\gamma_{543}/C_{44}) \cdot (\omega^2/v_0^2).$$

Решая задачу о генерации гармоник, мы рассмотрим отдельно три случая: генерацию гармоник волнами левой, правой круговой поляризации и линейно-поляризованной волной.

Волна левой круговой поляризации имеет компоненты смещения

$$(5) \quad u_1 = u_0 \cos [\omega t - k_{\perp}(\omega) x],$$

$$(6) \quad u_2 = u_0 \sin [\omega t - k_{\perp}(\omega) x].$$

(81)

Значение модуля волнового вектора на частоте ω

$$(7) \quad k_{\perp}(\omega) = k_0(\omega) + \Delta k(\omega) = \omega/v_0 + 0,5(\gamma_{543}/C_{44}) \cdot (\omega^2/v_0^2).$$

Уравнения для гармоник имеют вид

$$(8) \quad \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - C_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \gamma_{543} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} = -C_{444} u_0^2 k_0^3(\omega) \cos[2\omega t - 2k_{\perp}(\omega) x],$$

$$(9) \quad \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - C_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \gamma_{543} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} = C_{444} u_0^2 k_0^3(\omega) \sin[2\omega t - 2k_{\perp}(\omega) x].$$

На границе кристалла ($x=0$) амплитуда гармоник должна быть равна нулю. Этому условию удовлетворяет решение

$$(10) \quad u_1 = -\frac{1}{4} \frac{C_{444}}{C_{44}} u_0^2 k_0^2(\omega) \frac{\sin[\Delta k(\omega) x]}{\Delta k(\omega)} \times \\ \times \sin[2\omega t - 2k_{\perp}(\omega) x + \Delta k(\omega) x],$$

$$(11) \quad u_2 = \frac{1}{4} \frac{C_{444}}{C_{44}} u_0^2 k_0^2(\omega) \frac{\sin[\Delta k(\omega) x]}{\Delta k(\omega)} \cos \times \\ \times [2\omega t - 2k_{\perp}(\omega) x + \Delta k(\omega) x].$$

Таким образом, волна левой круговой поляризации генерирует гармонику такой же поляризации. Наличие пространственной дисперсии нарушает фазовый синхронизм, так как $k_{\perp}(2\omega) \neq 2k_{\perp}(\omega)$, поэтому амплитуда гармоник является периодической функцией координаты в направлении распространения волны, т. е. испытывает пространственные биения с периодом

$$(12) \quad x_0 = \pi/\Delta k(\omega) = 2\pi(C_{44}/\gamma_{543}) \cdot (v_0^2/\omega^2).$$

Аналогичный результат получается для волны правой круговой поляризации. Такая волна генерирует гармонику правой круговой поляризации, амплитуда которой периодически изменяется в направлении распространения. Величина этого периода определяется формулой (12).

Компоненты смещения для волны линейной поляризации

$$(13) \quad u_1 = 2u_0 \cos[\Delta k(\omega) x] \cos[\omega t - k_0(\omega) x],$$

$$(14) \quad u_2 = -2u_0 \sin[\Delta k(\omega) x] \cos[\omega t - k_0(\omega) x].$$

Из уравнений для гармоник мы выпишем лишь правые части

$$(15) \quad F_1(2\omega) = C_{444} u_0^2 k_0^3(\omega) \{ \cos[2\omega t - 2k_{\perp}(\omega) x] - \\ - \cos[2\omega t - 2k_{\perp}(\omega) x] \},$$

$$(16) \quad F_2(2\omega) = C_{444} u_0^2 k_0^3(\omega) \{ \sin[2\omega t - 2k_{\perp}(\omega) x] + \\ + \sin[2\omega t - 2k_{\perp}(\omega) x] \}.$$

Члены со значениями волнового вектора $k_{\perp}(\omega) \pm k_{\perp}(\omega)$ отсутствуют, следовательно, волны разной круговой поляризации не взаимодействуют, поэтому решение для гармоник, генерируемой волной линейной поляризации, является просто суммой решений для гармоник, генерируемых каждой из волн круговой поляризации. В результате гармоника имеет линейную поляризацию

$$(17) \quad u_1 = \frac{1}{2} \frac{C_{444}}{C_{44}} u_0^2 k_0^2(\omega) \frac{\sin[\Delta k(\omega) x]}{\Delta k(\omega)} \times \\ \times \sin[2\Delta k(\omega) x] \cos[2\omega t - 2k_0(\omega) x],$$

$$(18) \quad u_2 = \frac{1}{2} \frac{C_{444}}{C_{44}} u_0^2 k_0^2(\omega) \frac{\sin[\Delta k(\omega)x]}{\Delta k(\omega)} \times \\ \times \cos[2\Delta k(\omega)x] \cos[2\omega t - 2k_0(\omega)x].$$

В отсутствие пространственной дисперсии ($\Delta k(\omega)=0$) угол между плоскостями поляризации волны с частотой ω и гармоники составляет 90° . Фазовые скорости этих волн одинаковы и равны v_0 , поэтому амплитуда гармоники монотонно возрастает по мере распространения волны вдоль кристалла. В акустически активном кристалле ($\Delta k(\omega) \neq 0$) фазовые скорости волны с частотой ω и гармоники тоже одинаковы и равны v_0 , однако амплитуда гармоники испытывает пространственные биения с периодом, определяемым формулой (12). Связано это с тем, что плоскости поляризации волны с частотой ω и гармоники поворачиваются при распространении волн вдоль кристалла, причем угол между этими плоскостями периодически меняется, так как для волны частоты ω величина угла поворота плоскости поляризации $\varphi = \Delta k(\omega)x$, а для гармоники — в 2 раза больше.

Для кристалла кварца можно сделать численные оценки угла поворота плоскости поляризации гармоники и периода пространственных биений ее амплитуды. По данным [4, 5], на частоте 10^9 Гц угол поворота плоскости поляризации $\varphi = 125^\circ$ на 1 см. Для гармоники получим: $x_0 = 1,5$ см, а величина вращения плоскости поляризации — 250° на 1 см.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А. О естественном вращении плоскости поляризации звука. — Изв. вузов, Радиофизика, 1960, т. 3, с. 645–649.
2. Portigal D. L., Burstein E. Acoustical Activity and other First Order Spatial Dispersion Effects in Crystals. Phys. Rev., 1968, v. 170, p. 673–678.
3. Вужва А. Д., Лямов В. Е. Акустическая активность и другие эффекты, обусловленные пространственной дисперсией в кристаллах. — Кристаллография, 1977, т. 22, № 1, с. 131–137.
4. Pine A. S. Direct Observations of Acoustical Activity in α -Quartz. Phys. Rev., 1970, v. B2, p. 2049–2054.
5. Брыжина М. Ф., Есаев С. Х. Акустическая активность тригональных кристаллов. — ФТТ, 1978, т. 20, с. 2628–2636.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
28.IV.1981