

УДК 534.2

К ВОПРОСУ О РАССЕЙАНИИ ЗВУКА ВИХРЕМ

Фабрикант А.Л.

Найдены сечения рассеяния и поглощения звуковой волны на цилиндрическом вихре с учетом рефракции звука в движущейся среде вдали от вихревого ядра.

В работе [1] найдено, что взаимодействие звуковой волны с синхронными частицами вращающегося потока (цилиндрического вихря) приводит к усилению звука. Однако доказательство этого утверждения проведено не вполне корректно, поскольку при исследовании рассеяния звука необходимо учитывать не только колебания вихревого ядра, но и рефракцию звуковых волн в движущейся среде вдали от ядра вихря. Ниже мы найдем сечения рассеяния и поглощения звука на вихре с учетом обоих этих эффектов и покажем, что вывод о возможности резонансного усиления вихрем низкочастотного звука сохраняет силу и при учете рефракции. При этом оказывается, что учет рефракции не влияет на сечение поглощения, но существенно изменяет вид сечения рассеяния.

Вычислим величину $L(r) = \text{Re}(r^2 u^* v)$, где $V = (u, v)$ — амплитуда $\exp(i\omega t - in\varphi)$ колебаний скорости (движение без потери общности можно считать двумерным [1, 2]; r, φ — полярные координаты). При $r \gg a$ (a — размер вихревого ядра) течение потенциально: $V = \nabla\Phi$ и для потенциала Φ имеем уравнение

$$(1) \quad \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \Phi + \frac{[\omega - n\Omega(r)]^2}{c^2} \Phi = 0.$$

Здесь Ω — угловая скорость вращения частиц жидкости в стационарном вихревом течении, c — скорость звука ($c = \text{const}$ [1]). Умножив уравнение (1) на $inr\Phi^*$ и интегрируя по частям от $r=r_1$ до $r=r_0$, нетрудно показать, что $L(r_0) = L(r_1)$, где $r_0 \gg \lambda = 2\pi c/\omega$, $a \ll r_1 \ll \lambda$. При $\mu = \omega a/c \ll 1$, $\Omega \ll \omega$ приближенное решение уравнения (1) выражается через функции Ганкеля $H_n^{(1)}$ и $H_n^{(2)}$:

$$(2) \quad \Phi = A [H_n^{(1)}(\omega r/c) + R_n H_n^{(2)}(\omega r/c)]; \quad A = \text{const}.$$

Отсюда следует, что

$$(3) \quad L(r_0) = \frac{2|n|}{\pi} |A|^2 (|R_n|^2 - 1).$$

В то же время при $r \ll \lambda$ движущуюся среду можно считать несжимаемой и для функции тока ψ ($u = d\psi/dr$, $v = in\psi$) мы имеем [1] уравнение

$$(4) \quad \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \psi - \frac{d^2\Omega/dr^2 + 3r^{-1}d\Omega/dr}{\Omega - \omega/n} \psi = 0.$$

Умножая это уравнение на $inr\psi^*$ и интегрируя по частям с учетом правила обхода резонансных особых точек r_n ($\Omega(r_n) = \omega/n$) [1], получим $L(r_1) = -\pi n [|\psi|^2 |d\Omega/dr|^{-1} dQ/dr]_{r=r_n}$, где $Q = rd\Omega/dr + 2\Omega$ — завихренность стационарного течения. Сравнивая это выражение с формулой (3), получим $(1 - |R_n|^2) \propto (dQ/dr)_{r=r_n}$. Таким образом, если завихренность убывает, то звуковая волна усиливается при отражении ($|R_n| > 1$).

При $r \gg a$ решение уравнения (4) имеет вид

$$(5) \quad \psi = B [(r/a)^n + q_n (r/a)^{-n}]; \quad B = \text{const},$$

где величины q_n определяются профилем относительной угловой скорости $\Omega(r)/\omega$ [1]. Сравнивая выражения (5) и (2) в области $a \ll r \ll \lambda$, можно показать, что $|1 - R_n| \ll \mu^2$ и $|B| = 2(|n|!)^{-1}(\omega a/2c)^{|n|}|A|$. В то же время из формулы (5) следует: $L(r_1) = -2n^2|B|^2 \operatorname{Im} q_n$, откуда с учетом формулы (3) получаем

$$(6) \quad 1 - |R_n|^2 = \frac{4\pi}{|n|!(|n|-1)!} \left(\frac{\omega a}{2c}\right)^{2|n|} \operatorname{Im} q_n.$$

Сечение поглощения плоской волны определяется гармоникой $n=2$ [1]:

$$(7) \quad \sigma_r = \frac{c}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 - |R_n|^2) \approx \frac{c}{\omega} (1 - |R_2|^2) = \frac{\pi a}{8} \left(\frac{\omega a}{c}\right)^3 \operatorname{Im} q_2.$$

Это выражение совпадает с полученным в работе [1].

С помощью метода срачиваемых асимптотических разложений можно найти сечение рассеяния σ_e . Для этого введем внешнюю переменную $\sigma = \omega r/c$ и внутреннюю $\xi = r/a$. Из уравнения (1) получаем внешнее разложение с точностью μ^2

$$(8) \quad \Phi_2^e = A [H_\alpha^{(1)}(\sigma) + \tilde{R}_n H_\alpha^{(2)}(\sigma)] \xrightarrow{\sigma \gg |n|} \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma}} \left[\exp\left[i\left(\sigma - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{i\pi}{2} \mu^2 \frac{n\Omega_0}{|n|\omega}\right] + \tilde{R}_n \exp\left[-i\left(\sigma - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{i\pi}{2} \mu^2 \frac{n\Omega_0}{|n|\omega}\right] \right],$$

где $\alpha^2 = n^2 + \frac{2n\Omega_0}{\omega} \mu^2$, $\Omega(r \gg a) \approx \Omega_0 a^2/r^2$. Отсюда получаем, что коэффициент

отражения цилиндрической звуковой волны $R_n = \tilde{R}_n \exp(i\pi \mu^2 n \Omega_0 / |n| \omega)$.

Внутреннее разложение с точностью μ^0 имеет вид (5). Срачивая выражения (5) и (8), получим с точностью μ^2 , что $\tilde{R}_n = 1$ при $|n| \geq 2$ и $\tilde{R}_n = 1 + i\pi q_n \mu^2/2$ при $n = \pm 1$. Воспользовавшись теперь результатами работы [1], где показано, что с точностью μ^2 имеем: $R_0 = 1$, $q_{\pm 1} = \mp \Omega_0/\omega$ нетрудно получить

$$(9) \quad d\sigma_e = \frac{c}{2\pi\omega} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (R_n - 1) e^{-in\varphi} \right|^2 = \frac{\pi a}{2} \left(\frac{\Omega_0 a}{c}\right)^3 \frac{\omega}{\Omega_0} \cos^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Это выражение было получено в работах [2, 3] другим способом — с помощью метода возмущений по параметру $\nu = (\omega a/c)^2 \Omega_0/\omega$. Заметим, что, хотя при $\Omega_0 \sim \omega$ сечение поглощения (7) имеет тот же порядок $\mu^3 a$, что и сечение рассеяния (9), для вычисления его недостаточно борновского приближения, использованного в работах [2, 3], а требуется вычислить следующее приближение теории возмущений. Используемое в настоящей работе разложение по цилиндрическим гармоникам позволяет найти σ_e и σ_r более просто.

ЛИТЕРАТУРА

1. Големшток Г. М., Фабрикант А. Л. Рассеяние и усиление звуковых волн цилиндрическим вихрем. — Акуст. ж., 1980, т. 26, № 3, с. 383–390.
2. Пугаевский Л. П. Вычисление фоновой части силы взаимного трения в сверхтекучем гелии. — ЖЭТФ, 1958, т. 35, № 5, с. 1271–1275.
3. Ferziger J. H. Low-frequency acoustic scattering from a trailing vortex. — J. Acoust. Soc. Amer., 1974, v. 56, № 6, p. 1705–1707.

Институт
прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
22.1.1981