АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIX 1983 Вып. 1

УДК 534.26

КАУСТИКА, ОБРАЗОВАННАЯ ПРИ УЧАСТИИ ДИФРАКЦИОННОГО ЛУЧА

Годин О. А.

Получено асимптотическое выражение поля в окрестности каустики, образованной при участии дифракционного луча. Указан способ нахождения поля вблизи каустики через характеристики лучей. В качестве примера рассмотрено отражение сферической звуковой волны от жидкого слоистого полупространства.

В большом числе работ (см., например, [1, 2]) для анализа распространения звуковых и электромагнитных волн в неоднородных средах и дифракции на телах применяется геометрическая теория дифракции, которая при описании высокочастотной асимптотики поля наряду с обычными лучами геометрической оптики (геометрической акустики) привлекает так называемые дифракционные лучи различных типов. Эти лучи появляются при дифракции на особенностях поверхности (край, вершина), скольжении обычного луча вдоль поверхности рассеивающего тела, в зоне тени за каустикой, при наличии критического угла полного отражения и т. д.

Л. М. Бреховских [3] и Л. Фельсеном [4] был развит альтернативный подход, основанный на интегральных представлениях поля, и произведено его сопоставление с лучевым для двумерных задач. В этом методе поле заданного источника представляется в виде разложения по некоторой более простой системе волн. Как правило, решение имеет вид

$$\psi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(k,\zeta)\,e^{ikf(\zeta)}\,d\zeta, \tag{1}$$

где Φ, f — аналитические функции ζ, параметрически зависящие от координат излучателя и приемника, k — значение волнового числа в фиксированной точке неоднородной среды. Высокочастотное поведение ψ определяется сингулярностями функций Φ, f, а также числом и расположением стационарных точек f. Когда эти особые точки достаточно удалены друг от друга, а стационарные точки ζ_s имеют первый порядок, т. е. $f''(\zeta_s)\neq 0$, геометрическая теория дифракции дает главные члены асимптотических разложений по степеням $1/k$. (Функция $f(\zeta)$ имеет размерность длины, и истинным большим параметром задачи является безразмерная величина $k\cdot R$, где R — некоторый характерный линейный размер. Ниже для краткости будем говорить просто о зависимости от k). Стационарным точкам отвечают лучи, в том числе комплексные, точкам ветвления — боковые волны, полюсам ζ_p функции Φ — обычные плоские, поверхностные или «вытекающие» волны в зависимости от значения $f(\zeta_p)$ [3—5].

Если приемник расположен в таких областях пространства, что соответствующие особые точки подынтегрального выражения неограниченно сближаются, то лучевая теория приводит к расходящимся значениям поля и неприменима. Переходные явления при сближении полюса и стационарной точки нашли свое детальное изучение в работах [3, 4]. Поле в окрестности каустик, образованных обычными лучами (им соответствует сближение двух и более стационарных точек), подробно обсуждено с различных точек зрения в работах [3, 4, 6—8 и др.].

Настоящая работа посвящена изучению волнового поля в окрестности каустики, образованной обычным и дифракционным лучами, методом эта-

лонных функций. В интегральном представлении (1) при смещении приемника вблизи такой каустики происходит сближение стационарной точки первого порядка и точки ветвления. Близкие вопросы с иных позиций рассматриваются в работе [9].

В качестве эталонного интеграла, содержащего присущие задаче аналитические особенности функций Φ и f, естественно взять

$$I(\rho, b, \alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\rho x^2)\,(x-b)^{\alpha}\,dx. \tag{2}$$

Здесь ρ, b, α — комплексные числа. Условие $\arg\rho\in(0, \pi)$ обеспечивает сходимость интеграла при всех b, α. Исключением являются лишь чисто вещественные значения b при $\operatorname{Re}\alpha\leqslant-1$. При этом функция I испытывает разрыв на вещественной оси b и остаются определенными пределы $\lim\limits_{\eta\to\pm0} I(\rho, b'+ib'', \alpha)$ $(b'\equiv\operatorname{Re} b,\ b''\equiv\operatorname{Im} b)$. В подынтегральное выражение входит многозначная аналитическая функция $(x-b)^{\alpha}$. Однозначность $I(\rho, b, \alpha)$ достигается выделением регулярной ветви $(x-b)^{\alpha}$. Будем считать, что

$$\arg(x-b)\in(-\pi, \pi). \tag{3}$$

В дальнейшем для определенности примем, что аргументы всех комплексных чисел удовлетворяют условию (3).

Исходя из определения функции параболического цилиндра $D_{\alpha}(z)$ как решения соответствующей задачи Коши [10], можно показать, что

$$I(\rho, b, \alpha)=\sqrt{2\pi}(2\rho)^{-(1+\alpha)/2}\exp\left[i\rho b^2/2+\right.$$
$$\left.+i\pi(1-\alpha)/4+i\pi\alpha(1-\operatorname{sgn} b'')/2\right]D_{\alpha}(\sqrt{2\rho}\,b e^{-3\pi i/4}\operatorname{sgn} b''), \tag{4}$$

$$I_6=\int_{\gamma} e^{i\rho x^2}(x-b)^{\alpha}\,dx=$$

$$=2\pi/\Gamma(-\alpha)\,e^{i\rho b^2/2+i\pi(d+3)/4}(2\rho)^{-(1+\alpha)/2}D_{-\alpha-1}(b e^{3\pi i/4}\sqrt{2\rho})\operatorname{sgn} b''. \tag{5}$$

Значение интеграла I_6 понадобится ниже при рассмотрении поля боковой волны. Здесь γ означает контур, охватывающий разрез $\arg(x-b)=\pi$, который связан с выделением регулярной ветви $(x-b)^{\alpha}$. Направление обхода γ выбрано таким образом, что ближняя к вещественной оси часть контура параллельна оси, а дальняя — антипараллельна.

Когда стационарная точка $x=0$ и точка ветвления $x=b$ далеки, т. е.

$$|\rho b^2|\gg1, \tag{6}$$

из асимптотического разложения функций параболического цилиндра можно получить, что

$$I(\rho, b, \alpha)\sim\sqrt{\pi/\rho}\cdot e^{i\pi/4}(-b)^{\alpha}[1+i\alpha(\alpha-1)(4\rho b^2)^{-1}-\ldots], \tag{7}$$
$$\arg(\sqrt{\rho}\,b)\in(0, \pi]\cup[-\pi, -\pi/2].$$

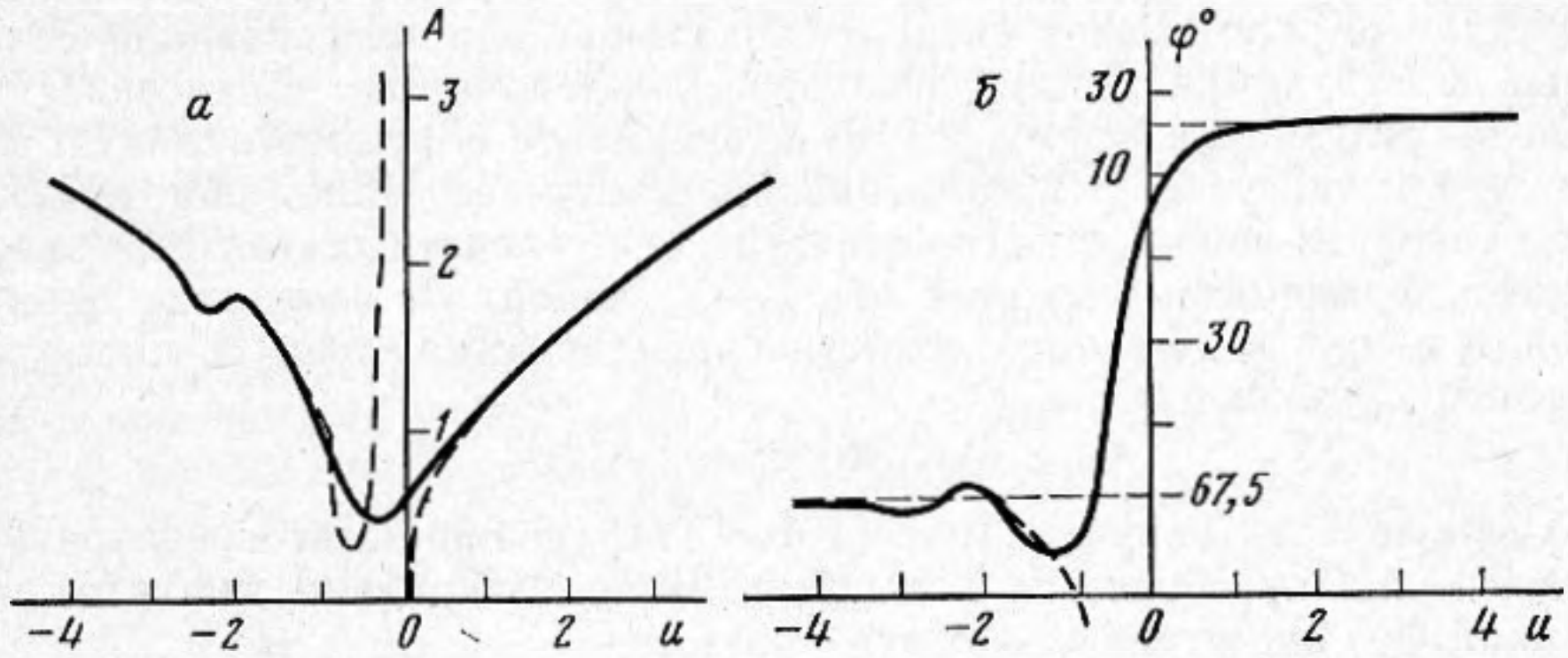
$$I(\rho, b, \alpha)\sim\sqrt{\pi/\rho}\,e^{i\pi/4}(-b)^{\alpha}[1+i\alpha(\alpha-1)(4\rho b^2)^{-1}-\ldots]+$$
$$+2\pi\exp(i\rho b^2-i\pi\alpha/2)/\Gamma(-\alpha)(2\rho b)^{-1-\alpha}[1+i\alpha(\alpha+1)(4\rho b^2)^{-1}-\ldots], \tag{8}$$
$$\arg(\sqrt{\rho}\,b)\in[0, \pi/2)\cup(-\pi, 0).$$

Для краткости формулы (7), (8) выписаны только для $b''>0$. Анализ этих соотношений показывает, что при вещественных ρ и $|b''|\ll1$ переход от отрицательных значений b' к положительным качественно меняет характер асимптотики: появляется или исчезает второе слагаемое, что соответствует включению боковой волны.

Функция $\Phi_1(u)=e^{iu^2/2}D_{0,5}(\sqrt{2}e^{i\pi/4}u)$ при $u=-\sqrt{\rho}\cdot b'\cdot\operatorname{sgn} b''$ передает зависимость I от b (I и Φ_1 отличаются множителем, зависящим лишь от ρ) в важном частном случае $\rho'\gg\rho''$; $|b'|\gg|b''|$; $\alpha=0{,}5$. Зависимость моду-

ля A и фазы φ функции Φ_1 от u показана на фиг. 1. Изменением знака φ из фигуры получаются графики функции $\Phi_2(u)=e^{-iu^2/2}D_{0,5}(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}u)$, играющей ту же роль, что и Φ_1, при $-\rho'\gg\rho''$; $u=-\sqrt{-\rho}\cdot b'\operatorname{sgn} b''$. Асимптотика удовлетворительно приближает модуль, когда $|u|>1$, а при $|u|>1{,}5$ — фазу Φ_1.

Эталонные интегралы, подобные (2), рассмотрены в ряде работ. Так, в статье [11] подробно изучен случай $\alpha=0{,}5$, в работах [3, § 31; 4; 12, гл. 4, § 4, 5] близкие эталонные интегралы вычислены для отрицательных и полуцелых значений параметра α. Будем использовать эталонную функцию (2), позволяющую наиболее просто и в общем виде получить асимптотику поля в окрестности каустики, образованной при участии дифракционного луча.



Фиг. 1. Модуль A (*а*) и фаза φ (*б*) функции $\Phi_1(u)$. Пунктиром показаны приближенные значения A и φ, получающиеся при учете первых членов каждого из слагаемых в асимптотических разложениях (7), (8)

Перейдем к вычислению поля гармонического источника сферических волн в слоисто-неоднородной среде. Введем цилиндрическую систему координат с перпендикулярной слоям осью Oz. Источник расположен в точке (O, z_0), приемник — в точке (r, z, χ). Используя разложение излучаемой волны по плоским (с безразмерным горизонтальным волновым числом $\zeta=k_r/k$) с последующим интегрированием по χ, можно получить интегральное представление поля вида (1). Предположим, что при рассматриваемых расположениях источника и приемника $f(\zeta)$ имеет единственную стационарную точку ζ_1: $f'(\zeta_1)=0$ и $f''(\zeta_1)\neq0$, $\operatorname{Im}\zeta_1=\operatorname{Im}f''(\zeta_1)=0$ (здесь и ниже производные по ζ обозначаются штрихами), а Φ задана рядом, сходящимся в окрестности точки $\zeta=\zeta_2$ равномерно по k, r, z, z_0:

$$\Phi(k, r, z, z_0, \zeta)=\sum_{m=0}^{\pm\infty} A_m(k, r, z, z_0)(\zeta-\zeta_2)^{m\beta}, \qquad \beta>0, \qquad \operatorname{Im}\zeta_2=0. \tag{9}$$

Вычисление интеграла (1) методами перевала и скорейшего спуска дает решение, соответствующее приближению геометрической теории дифракции:

$$\psi=(2\pi/|kf''(\zeta_1)|)^{1/2}\exp[ikf(\zeta_1)+ \\ +i\pi/4\cdot\operatorname{sgn} f''(\zeta_1)]\,\Phi(\zeta_1)[1+O(k^{-1})]+\psi_б\cdot\theta[\pm(\zeta_2-\zeta_1)]; \tag{10}$$

$$\psi_б=2\pi/\Gamma(-q\beta)A_q(k, r, z, z_0)|kf'(\zeta_2)|^{-1-g\beta}\times \\ \times\exp[ikf(\zeta_2)-i\pi g\beta/2\times\operatorname{Sgn} f'(\zeta_2)]\times \\ \times[1+O(k^{-\beta}+k^{-1})]. \tag{11}$$

Здесь $\theta(x)=(1+\operatorname{sgn} x)/2$ — функция скачка, q — наименьшее натуральное число такое, что $A_q/\Gamma(-\beta q)\neq0$. Если таких q нет, то $\psi_б=0$. При полуцелых β оценка поправочного члена в выражении (11) может быть усилена от $O(k^{-\beta}+k^{-1})$ до $O(k^{-1})$.

Первый член в формуле (10) — вклад от стационарной точки ζ_1. При деформации в плоскости комплексного переменного ζ исходного контура интегрирования в перевальный путь возможно пересечение разреза, появляющегося в результате выделения регулярной ветви многозначной аналитической функции $\Phi(\zeta)$. Когда число таких пересечений нечетно (для учета способа ухода разреза на бесконечность к этому числу нужно добавить 1, если достаточно удаленная часть разреза полностью находится в области, заметаемой при деформации контура), в ψ добавляется вклад от интеграла по берегам разреза, дающий второй член в формулу (10), соответствующий боковой волне. Когда разрез проходит вблизи ζ_1, в интеграл (11) по охватывающему разрез контуру должен быть дополнительно внесен соответствующий вклад стационарной точки. При изменении знака разности $\zeta_2-\zeta_1$ число точек пересечения разреза меняется на единицу, что и вызывает скачок — появление или исчезновение боковой волны. Пусть $\zeta_1<\zeta_2$. Если разрез пересекается четное число раз (в том числе ни разу), то в формуле (10) в аргументе θ-функции следует взять знак «—» и знак «+» в противоположном случае. Ниже для краткости будем говорить соответственно о «четных» и «нечетных» интегралах (1). Вместе с функциями Φ, f разность $\zeta_2-\zeta_1$ зависит от координат точек излучения и приема. Граница области существования боковой волны задается неявно уравнением

$$\zeta_1(r,\ z,\ z_0)=\zeta_2(r,\ z,\ z_0). \tag{12}$$

Лучевую трактовку формул (10), (11) удобно дать, предварительно тождественно преобразовав подынтегральное выражение так, что вместо функций Φ, f оно будет содержать функции

$$\tilde{f}(\zeta)=f(\zeta)+a(\zeta-\zeta_2)^{\beta}/k;\quad \tilde{\Phi}(\zeta)=\Phi(\zeta)e^{-a(\zeta-\zeta_2)^{\beta}}; \tag{13}$$

$$a=-iA_1/A_0.$$

Считаем здесь $0<\beta<1$, a не зависит от k. Формулы (13) переносят основную (при $\zeta\approx\zeta_2$) часть зависимости Φ от ζ на $\tilde{f}$.

При сделанных выше предположениях $\tilde{f}'(\zeta)$ может иметь 1 и 2 нуля. Одна стационарная точка существует во всех случаях, близка к ζ_1 и определяет первый член в выражении (10). Вклад этого члена может быть интерпретирован как поле обычного луча. Вторая стационарная точка близка к ζ_2, существует при $\zeta_2>\zeta_1$ или $\zeta_2<\zeta_1$ в зависимости от соотношения параметров и дает в поле вклад, равный $\psi_б$. Эту точку, следовательно, можно сопоставить боковому лучу. Когда разность $\zeta_2-\zeta_1$ делается малой, нули $\tilde{f}'(\zeta)$ сближаются и совпадают при нахождении точки наблюдения на каустической поверхности — огибающей семейства лучей, которая отыскивается из системы уравнений $\tilde{f}'(\zeta)=0$, $\tilde{f}''(\zeta)=0$, как и каустика обычных лучей. Считая для определенности a вещественным и имеющим тот же знак, что и $f''(\zeta_1)$, можно получить неявное уравнение каустики в виде

$$\zeta_1-\zeta_2=\frac{2-\beta}{1-\beta}\left[\frac{(1-\beta)\beta a}{kf''(\zeta_1)}\right]^{1/(2-\beta)}. \tag{14}$$

По разные стороны поверхности (14) функция $\tilde{f}(\zeta)$ имеет соответственно 1 и 2 стационарные точки, т. е. при переходе через эту поверхность меняется число лучей, приходящих в точку наблюдения.

Из сказанного выше видна близкая аналогия поведения стационарных точек, а значит, и геометрии лучей при перемещении точки наблюдения в окрестностях каустики обычного и дифракционного лучей и гладкой или имеющей несколько точек заострения каустики обычных лучей. Имеется, однако, и качественное отличие. В первом случае каустика отвечает переходу «2→1» в числе лучей, а при пересечении любой ветви каустики обычных лучей (произвольного вида) количество (вещественных) лучей меняется на четное число [4, 5, 7].

При сближении точек ζ_1 и ζ_2 формулы (10), (11) дают разрывные неограниченные значения поля и перестают быть справедливыми из-за нарушения условий $k|f'(\zeta_2)|\gg1$ и медленности изменения функции Φ в

существенной для интегрирования области, которые необходимы для применимости использованных выше асимптотических методов. Условием справедливости выражений (10), (11) оказывается

$$k|f''(\zeta_1)|(\zeta_2-\zeta_1)^2\gg 1. \tag{15}$$

На каустике, образованной с участием дифракционного луча, (14) выполняется неравенство $k|f''(\zeta_1)|(\zeta_2-\zeta_1)^2\infty|kf''(\zeta_1)|^{-\beta/(2-\beta)}\ll 1$, обратное неравенству (15). Как и следовало ожидать, вблизи такой каустики лучевые представления неприменимы. Вопрос о том, разделяют ли области, куда приходит разное число лучей, поверхность (12) — границы области существования боковой волны или каустика (14), не имеет физического содержания, поскольку бессмысленно определять число лучей в условиях неприменимости лучевых представлений. Переходные явления происходят в области, содержащей обе поверхности. Несовпадение (12) и (14) не противоречит, следовательно, лучевой интерпретации боковой волны.

Поскольку k предполагается большим, при невыполнении неравенства (15) заведомо

$$|\zeta_2-\zeta_1|\ll 1, \tag{16}$$

причем условия (15) и (16) могут выполняться одновременно.

При условии (16) $|\zeta-\zeta_2|\ll 1$ в существенной для интегрирования области, и справедливо разложение (9). Подстановка его в интеграл (1) и представление $f(\zeta)$ в виде $f(\zeta)=f(\zeta_1)+1/2f''(\zeta_1)(\zeta-\zeta_1)^2+O(|\zeta-\zeta_1|^3)$ приводят к выражению поля через интеграл типа (2):

$$\psi\approx\tilde{\psi}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp[ikf(\zeta_1)+ikf''(\zeta_1)/2(\zeta-\zeta_1)^2]\sum_{m=0}^{+\infty}A_m(\zeta-\zeta_2)^{m\beta}\,d\zeta=$$

$$=e^{ikf(\zeta_1)}\sum_{m=0}^{+\infty}A_m(k,r,z,z_0)I(kf''(\zeta_1)/2,\zeta_2-\zeta_1,m\beta). \tag{17}$$

В формуле (17) $\zeta_2-\zeta_1$ понимается в смысле $\zeta_2-\zeta_1\pm i0$. До сих пор мы использовали лишь локальное подобие интегралов (1) и (2). Требование подобия также и в относительном расположении перевального пути и разреза (одинаковой «четности» исходного и эталонного интегралов) конкретизирует выбор знака сколь угодно малой мнимой части $\zeta_2-\zeta_1$: если интеграл (1) «четен», то $f''(\zeta_1)\cdot\mathrm{Im}(\zeta_2-\zeta_1)<0$, для «нечетного» интеграла следует взять обратный знак неравенства. Подчеркнем, что выбираемый таким формальным образом знак $\mathrm{Im}(\zeta_2-\zeta_1)$ никак не связан с мнимостью $\zeta_2-\zeta_1$, возникающей при учете поглощения энергии волны в среде.

При получении соотношения (17) в показателе экспоненты был опущен член $k\cdot O(|\zeta-\zeta_1|^3)$, который в существенной при интегрировании области $k|f''(\zeta_1)|\cdot|\zeta-\zeta_1|^2\leqslant 1$ имеет порядок величины $|f''|^{-3/2}|f'''|\cdot k^{-1/2}\ll 1$. В окончательном результате это, как можно показать, приводит к погрешности

$$\psi-\tilde{\psi}=\tilde{\psi}\cdot O(k^{-1/2}). \tag{18}$$

Перейдем к анализу основного соотношения (17). Как видно из анализа формулы (4), вблизи каустики, где аргумент, а следовательно, и значение функции параболического цилиндра порядка 1, $|I(\rho,b,\alpha)|$ быстро убывает при росте α за счет множителя $|\rho|^{-(1+\alpha)/2}$, содержащего большой параметр в отрицательной степени. На удалении от каустики члены с наименьшими значениями m остаются доминирующими: это видно из анализа формул (7), (8), (16). Поэтому в выражении (17) существенны лишь первые члены. Так, если $A_1(k,r,z,z_0)$ не является аномально малым, на основании соотношения (17) получаем для поля вблизи каустики (т. е. при выполнении условия (16)) в «нечетном» случае выражение

$$\psi\approx\sqrt{\frac{2\pi}{|kf''(\zeta_1)|}}\,e^{ikf(\zeta_1)+i\pi/4\,\mathrm{sgn}\,f''(\zeta_1)}A_0(k,r,z,z_0)+\frac{\sqrt{2\pi}A_1(k,r,z,z_0)}{|kf''(\zeta_1)|^{(1+\beta)/2}}\times$$

$$\times e^{ikf(\zeta_1)+ikf''(\zeta_1)(\zeta_1-\zeta_2)^2/4+i\pi(1-\beta)/4\,\mathrm{sgn}\,f''(\zeta_1)}\times$$

$$\times D_\beta[\sqrt{|kf''(\zeta_1)|}(\zeta_2-\zeta_1)e^{-3\pi i/4}\,\mathrm{sgn}\,f''(\zeta_1)]. \qquad (19)$$

Аналогично соотношениям (17), (19) для полного поля ψ при тех же предположениях, используя выражение (5) вместо (4), можно получить формулы, описывающие боковую волну вблизи каустики. Аналогом формулы (19) будет (без предположения «нечетности») выражение

$$\psi_б \approx \frac{2\pi i\,\mathrm{sgn}[f'(\zeta_2)]A_q(k, r, z, z_0)}{\Gamma(-\beta q)|kf''(\zeta_1)|^{(1+\beta q)/2}}\exp[ikf(\zeta_1)+ikf''(\zeta_1)(\zeta_1-\zeta_2)^2/4+$$

$$+i\pi(1+\beta q)/4\,\mathrm{sgn}\,f''(\zeta_1)]D_{-1-\beta q}[\sqrt{|kf''(\zeta_1)|}(\zeta_2-\zeta_1)e^{3\pi i/4\,\mathrm{sgn}\,f''(\zeta_1)}], \qquad (20)$$

где q — то же, что и в соотношении (11).

Как указывалось выше, условия (15) и (16), вообще говоря, не противоречат друг другу. Когда они выполняются одновременно, функции I в формуле (17) можно заменить их асимптотическими разложениями (7), (8), так как неравенства (6) и (15) эквивалентны. При этом формула (17) переходит в соотношения (10), (11) даже без поправки (18). В совокупности выражения (10), (11) и (17) дают полное асимптотическое выражение поля при сделанных выше предположениях о свойствах функций f, Φ. В свою очередь соотношение (20) переходит в (11). Формулы (11) и (20) определяют боковую волну во всей области ее существования.

Соотношение (17) было получено выше из интеграла (1). Для расчета поля по формуле (17), однако, совершенно необязательно знать заранее интегральное представление. Решение, найденное в приближении геометрической теории дифракции, являясь само по себе неудовлетворительным в окрестности каустики, содержит тем не менее всю необходимую информацию для описания волновой картины в этой области.

Пусть известно уравнение лучей $r=r(z, z_0, \zeta)$ и главные члены асимптотических формул для полей ψ_1 обычного и ψ_2 бокового лучей. Величина ζ_1 характеризует наклон обычного луча, приходящего в точку (r, z) и определяется из уравнения $r=r(z, z_0, \zeta_1)$. Вблизи каустики $|\zeta_1-\zeta_2|\ll 1$ и $\Phi(\zeta_2)\approx A_0$. Сравнивая формулы (10) и (19), можно показать, что первое слагаемое в соотношении (19) совпадает с лучевым решением ψ_1 для поля по ту сторону от каустики, где отсутствует боковая волна. Точку ветвления ζ_2 находим по ζ_1, переходя к пределу $k\to\infty$ в уравнении каустики. Параметр $q\beta$ на 1 меньше порядка сингулярности, которую имеет поле бокового луча при $\zeta_1\to\zeta_2$ как функция горизонтального волнового числа или параллельного слоям расстояния до поверхности (12).

Выражая теперь производные от $f(\zeta)$ через производные от $r(\zeta)$ при помощи соотношения $r'(\zeta)=-f''(\zeta)$ (см. [3], § 45), получаем для двух главных членов формулы (17) в «нечетном» случае

$$\psi\approx\psi_1+\psi_2(2\pi)^{-1/2}\Gamma(-q\beta)\exp\left\{\frac{ik[r(\zeta_2)-r]^2}{4r'(\zeta_1)}+\right.$$

$$\left.+i\frac{\pi}{4}(1+q\beta)[2+\mathrm{sgn}\,r'(\zeta_1)]\right\}\left[k\frac{|r(\zeta_2)-r|^2}{|r'(\zeta_1)|}\right]^{(1+q\beta)/2}\times$$

$$\times D_{q\beta}\left[i\sqrt{\frac{k}{|r'(\zeta_1)|}}[r(\zeta_2)-r]e^{i\pi/4\,\mathrm{sgn}\,r'(\zeta_1)}\right]. \qquad (21)$$

В «четном» случае имеет место аналогичная формула, получающаяся из соотношения (21) домножением аргумента D-функции на -1 и ψ_2 на $\exp\{-i\pi(1+q\beta)[1+\mathrm{sgn}\,r'(\zeta_1)]/2\}$. В формуле (21) предэкспоненциальный множитель в квадратных скобках стремится к нулю при $\zeta_1\to\zeta_2$ и компенсирует наличие сингулярности у ψ_2, так что второе слагаемое в этом выражении имеет вблизи каустики и на ней отличное от нуля конечное значе-

ние. При больших удалениях от каустики формула (21) и ее аналог для «четного» случая дают $\psi \approx \psi_1 + \psi_2$ и $\psi \approx \psi_1$ в соответствующих областях пространства.

Используя результаты работ [3] и [6], дадим краткую сравнительную характеристику поведения полей в окрестности каустики, образованной при участии дифракционного луча, и неособой точки каустики обычных лучей. В обоих случаях лучевые решения дают на каустике расходящиеся разрывные величины поля, но содержат информацию, позволяющую построить асимптотическое решение в окрестности каустики, достаточной для перехода к лучевым выражениям в области их справедливости. Переходная зона неограниченно сужается с ростом частоты, но с разной скоростью: пропорционально $k^{-2/3}$ вблизи каустики обычных лучей и $k^{-1/2}$ вблизи каустики обычного и дифракционного лучей. Если $A_0 \neq 0$, на каустике обычного и дифракционного лучей не возникает заметного усиления поля. Главный член асимптотического разложения совпадает с главным членом поля обычного луча, но поправка пропорциональна не k^{-1}, а $k^{-\beta/2}$. На каустике обычных лучей интенсивность поля увеличивается пропорционально $k^{1/3}$. Амплитуда поля монотонна по одну сторону каждой из каустик и осциллирует по другую (там, где есть два луча), но в случае каустики обычных лучей осцилляции значительно глубже.

Пример: отражение сферической звуковой волны от жидкого слоистого полупространства.

Пусть плоскость $z=0$ является границей однородного ($z>0$) и слоисто-неоднородного полупространств, причем точки наблюдения и излучения находятся в однородной среде. Отраженная волна имеет интегральное представление (1) (см. книгу [3], § 26, 28) с функциями

$$f(\zeta) = R_1(\zeta \sin \theta_0 + \sqrt{1-\zeta^2} \cos \vartheta_0); \tag{22}$$

$$\Phi(\zeta) = k e^{i\pi/4} (2\pi k R_1 \sin \vartheta_0/\zeta)^{-1/2} (1-\zeta^2)^{-1/2} V(\zeta) \{1 + O[(kR_1)^{-1}]\}, \tag{23}$$

где $R_1^2 = (z+z_0)^2 + r^2$; $\theta_0 = \operatorname{arctg}[(z+z_0)/r]$; z, $z_0 > 0$; $V(\zeta)$ — коэффициент отражения плоской волны с безразмерным горизонтальным волновым числом ζ, k — волновое число в однородной среде.

Как известно, $V(\zeta)$ имеет точку ветвления при (см. книгу [3], § 36)

$$\zeta_2 = k^{-1} \lim_{z \to -\infty} k(z). \tag{24}$$

Предположим, что в окрестности ζ_2 радиусом в несколько $(kR_1)^{-1/2}$ у функции $\Phi(\zeta)$ нет других особенностей. В частности, ζ_2 не должно быть слишком близким к нулю и единице. Функция $f(\zeta)$ (выражение (22)) имеет единственную стационарную точку $\zeta_1 = \sin \vartheta_0$, причем $f''(\zeta_1) = -R_1 \cos^{-2} \vartheta_0 \neq 0$. Следовательно, для нахождения поля в переходной области применима развитая выше теория. Если $V(\zeta)$ не обладает другими особенностями во всей области, затрагиваемой при деформации контура интегрирования к перевальному пути, то формулы (10), (11), (17) полностью решают задачу нахождения асимптотических выражений для отраженного поля.

Для получения конкретных результатов необходимо задаться определенной моделью нижней среды. Предположим, что и нижнее полупространство однородно. Обозначим через m отношение плотностей нижней и верхней сред, а через n — обратное отношение скоростей звука. Будем считать $n = \sin \delta < 1$. Тогда $\zeta_2 = n$ и, как известно,

$$V_0(\zeta) = \frac{m\sqrt{1-\zeta^2} - \sqrt{n^2-\zeta^2}}{m\sqrt{1-\zeta^2} + \sqrt{n^2-\zeta^2}}, \quad \operatorname{Im} \sqrt{1-\zeta^2} \geqslant 0. \tag{25}$$

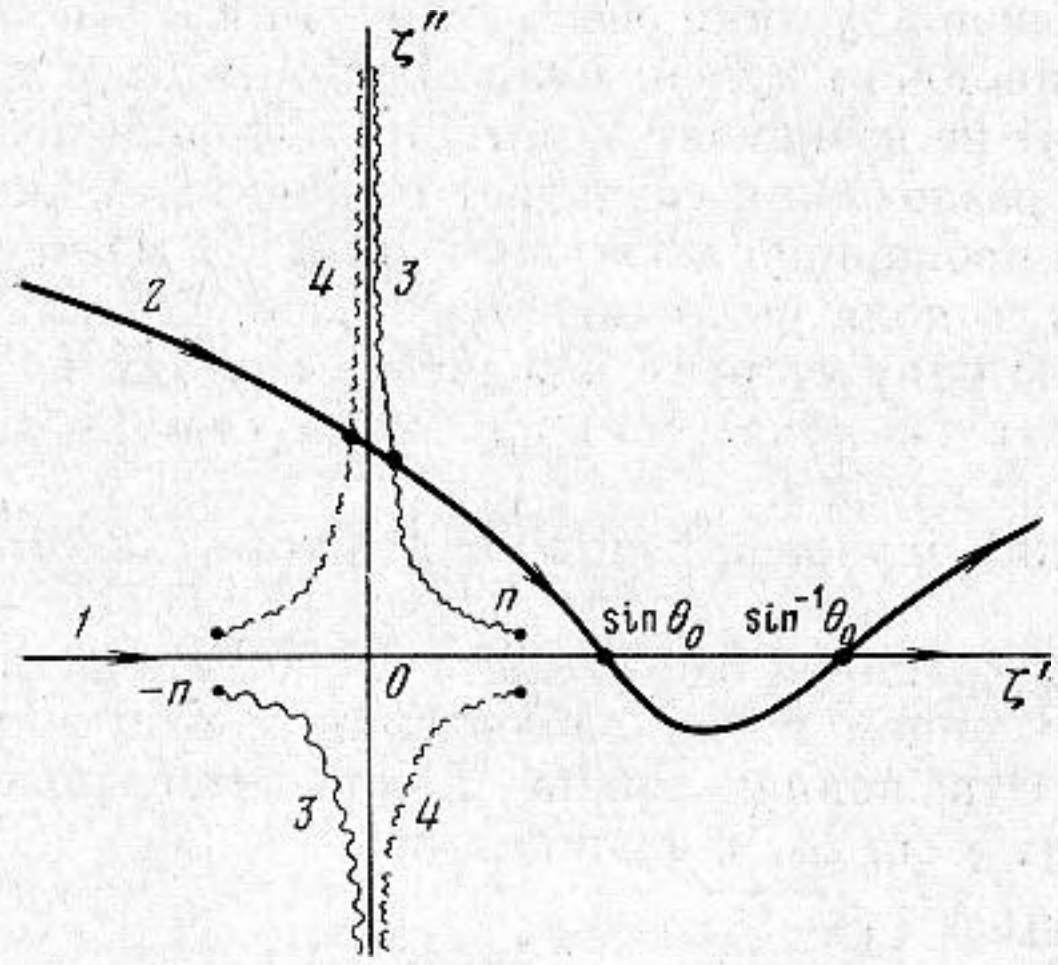
Из фиг. 2 видно, что в данном случае интеграл (1) является «четным». Разрезы, связанные с точками ветвления $\zeta = 0, \pm 1$ пересекаются при деформации контура интегрирования четное число раз и, следовательно, несущественны. На фиг. 2 они не показаны.

Определив из соотношений (23), (25) коэффициенты A_m, по формулам (10), (11), можно получить

$$\psi \approx e^{ikR_1}/R_1 V_0(\sin\vartheta_0)\{1+O[(kR_1)^{-1}]\}+$$
$$+2i\sin\delta(kR_1^2 m)^{-1}[\cos\delta\sin\vartheta_0\sin^3(\vartheta_0-\delta)]^{-1/2}\times$$
$$\times e^{ikR_1\cos(\vartheta_0-\delta)}\{1+O[(kR_1)^{-1}]\}\times\theta(\vartheta_0-\delta). \qquad (26)$$

Используя уравнение лучей $r(\zeta)=\zeta(1-\zeta^2)^{-1/2}(z+z_0)$, по изложенному выше рецепту можно найти поле в окрестности каустики (см. выражение (21)) в виде

$$\psi \approx \frac{e^{ikR_1}}{R_1}\Big[1-\frac{2\sqrt{2\,\mathrm{tg}\,\delta}}{m(kR_1)^{1/4}}e^{i\pi/8-d^2/4}\times D_{0.5}(id)\Big],$$
$$d=2\sqrt{kR_1}\,e^{i\pi/4}\sin\frac{\vartheta_0-\delta}{2}. \qquad (27)$$



Фиг. 2. Исходный контур интегрирования (1), перевальный путь (2) и разрезы в комплексной ζ-плоскости при $0<n''\ll 1$ (3), при $0<-n''\ll 1$ (4) в случае отражения сферической волны от неоднородного полупространства

Формула (20) дает для боковой волны вблизи критического угла соотношение

$$\psi_б \approx \frac{2k}{m}\sqrt{\mathrm{tg}\,\delta}(kR_1)^{-5/4}\times$$
$$\times\exp(ikR_1-d^2/4+7\pi i/8)\times$$
$$\times D_{-1,5}(d). \qquad (28)$$

Формулы (26)—(28) в основном согласуются с классическими результатами Л. М. Бреховских [3, § 28, 30, 31].

Усложним модель нижней среды. Пусть теперь между однородными полупространствами имеется тонкий по сравнению с длиной звуковой волны неоднородный слой с показателем преломления $n(z)$, $-l<z<0$. Плотность будем считать постоянной во всем пространстве. Применяя для определения коэффициента отражения плоских волн метод последовательных приближений, предложенный в работе [13], получаем с точностью до членов порядка $O[(kl)^3]$ выражение

$$V_l(\zeta)=V_0(\zeta)\times\{1+2iklN_1\sqrt{1-\zeta^2}/(1-n^2)+$$
$$+2(kl)^2\sqrt{1-\zeta^2}/(1-n^2)[2N_2\sqrt{n^2-\zeta^2}-$$
$$-N_1^2/(\sqrt{1-\zeta^2}+\sqrt{n^2-\zeta^2})]\}, \qquad (29)$$

где введены обозначения $N_1=l^{-1}\int_{-l}^{0}[n^2(t)-n^2]dt$, $N_2=l^{-2}\int_{-l}^{0}[n^2(t)-n^2]tdt$. Для справедливости формулы (29) кроме условия $kl\ll 1$ необходимо $|n-1|\gg kl$, чтобы второе и последующие слагаемые в фигурных скобках были поправками к первому.

Сохраняя лишь главные члены поправок, выпишем выражения для боковой волны и отраженного поля в окрестности каустики. Для их получения достаточно представить соотношение (29) в виде разложения по степеням $(\zeta-n)^{1/2}$ и сравнить его коэффициенты с аналогичными величинами разложения $V_0(\zeta)$ из формулы (25) при $m=1$. При $N_1\neq 0$ (а) в фигурных скобках в формуле (29) существенны два первых слагаемых. В об-

ратном случае (*б*) необходим учет квадратичного по kl члена.

$$\psi=[1+2ikl(1-n^2)^{-1/2}N_1]\psi_0; \tag{30а}$$

$$\psi=e^{ikR_1}/R_1[1-(1-2k^2l^2N_2)\cdot 2\sqrt{2\,\mathrm{tg}\,\delta}/m\times$$
$$\times(kR_1)^{-1/4}e^{i\pi/8-d^2/4}D_{0,5}(id)]; \tag{30б}$$

$$\psi_б=[1+2ikl(1-n^2)^{-1/2}N_1]\psi_{б0}; \tag{31а}$$

$$\psi_б=(1-2k^2l^2N_2)\psi_{б0}. \tag{31б}$$

Здесь ψ_0 означает поле при нулевой толщине слоя, а $\psi_{б0}$ — боковую волну в тех же условиях. ψ_0, $\psi_{б0}$ и d даются формулами (27) и (28) с $m=1$.

Автор благодарит Л. М. Бреховских за постановку задачи и руководство работой, а также А. Г. Вороновича и Н. Е. Мальцева за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Seckler B. D., Keller J. B.* Geometrical theory of diffraction in inhomogeneous media.— J. Acoust. Soc. Amer., 1959, v. 31, № 2, p. 192–205.
2. *Боровиков В. А., Кинбер Б. Е.* Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 247 с.
3. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. 2-е изд., доп. и перераб. М.: Наука, 1973. 343 с.
4. *Фельсен Л.* Квазиоптические методы в дифракции.— В кн.: Квазиоптика. М.: Мир, 1966, с. 11–62.
5. *Кравцов Ю. А.* Комплексные лучи и комплексные каустики.— Изв. вузов. Радиофизика, 1967, т. 10, № 9–10, с. 1283–1304.
6. *Кравцов Ю. А.* Об одной модификации метода геометрической оптики.— Изв. вузов. Радиофизика, 1964, т. 7, № 4, с. 664–673.
7. *Кравцов Ю. А.* О двух новых асимптотических методах в теории распространения волн в неоднородных средах.— Акуст. ж., 1968, т. 14, № 1, с. 1–24.
8. *Ludwig D.* Uniform asymptotic expansions at a caustic.— Commun. Pure and Appl. Math., 1966, v. 19, № 2, p. 215–250.
9. *Орлов Ю. И., Тропкин С. К.* Полутеневые дифракционные поля в неоднородных средах.— Изв. вузов. Радиофизика, 1981, т. 24, № 3, с. 334–342.
10. *Киреева И. Е., Карпов К. А.* Таблицы функций Вебера. Т. I. М.: ВЦ АН СССР, 1959, с. VI.
11. *Bleistein N.* Uniform asymptotic expansions of integrals with a stationary point near an algebraic singularity.— Commun. Pure and Appl. Math., 1966, v. 19, p. 353–370.
12. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. I. М.: Мир, 1978. 547 с.
13. *Lang R. H., Shmoys G.* Lateral waves on diffuse interfaces of finite thickness.— J. Acoust. Soc. Amer., 1970, v. 48, № 1(2), p. 242–252.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
7.V.1981
после исправления
24.XII.1981