

УДК 534.883

О ВОЗБУЖДЕНИИ ГРУПП МОД В СЛОИСТОМ ОКЕАНЕ

Кулаков В. Н., Мальцев Н. Е., Чупров С. Д.

Рассматривается структура поля точечного источника в слоистом океане. В ВКБ-приближении получены выражения для поля, создаваемого группами синфазно возбужденных нормальных волн.

При рассмотрении звукового поля, создаваемого точечным источником в слоистом океане, обнаружена характерная периодическая зависимость параметров звукового поля в координатах частота — расстояние см. работу [1]. В настоящей работе изложен теоретический анализ указанного вопроса, а также получено некоторое новое представление звукового поля в слоистом океане.

Рассмотрим механизм формирования поля нормальных волн

$$U(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} H_0^{(1)}(\xi_n r) \varphi_n(z) \varphi_n(z_0); \quad \varphi_n(0) = \varphi_n'(H) = 0 \quad (1)$$

(для простоты рассмотрения предлагаем дно океана абсолютно жестким). Рассмотрим как ведут себя коэффициенты возбуждения нормальных волн при фиксированных горизонтах источника z_0 и приемника z в зависимости от номера волны n $F(n) = \varphi_n(z) \varphi_n(z_0)$. Возьмем в качестве $\varphi_n(z)$ их ВКБ-асимптотики в виде

$$\varphi_n(z) \sim \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_n^2 \right)^{-1/4} \sin \left\{ \int_{z_n^-} \left(\frac{\omega^2}{c^2(t)} - \xi_n^2 \right)^{1/2} dt + q_n \right\}, \quad (2)$$

где z_n^- — верхняя точка поворота, которая может лечь и на поверхность океана, $z_n^- \geq 0$, q_n — несущественная для данного рассмотрения фазовая добавка (не превышающая $\pi/2$), связанная с сшиванием асимптотик в окрестности точки поворота. Очевидно, что соседние нули $\varphi_n(z)$ как функции номера n определяются условиями

$$\int_{z_{n_1}^-}^z \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{n_1}^2 \right)^{1/2} dz = m\pi - q_{n_1}, \quad (3)$$

$$\int_{z_{n_2}^-}^z \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{n_2}^2 \right) dz = (m + 1)\pi - q_{n_2}.$$

Соответственно, соседние нули $\varphi_n(z_0)$ как функции n определяются условиями

$$\int_{z_{n_{10}}^-}^z \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{n_{10}}^2 \right)^{1/2} dz = k\pi - q_{n_{10}}, \quad (4)$$

$$\int_{z_{n_{20}}^-}^z \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{n_{20}}^2 \right)^{1/2} dz = (k + 1)\pi - q_{n_{20}}.$$

Пусть при некоторых m и k отрезки $[n_1, n_2]$ и $[n_{10}, n_{20}]$ пересекаются. Определим N и N_0 как

$$N_0 = \frac{1}{2} (\max(n_1, n_{10}) + \min(n_2, n_{20})),$$

$$N = \frac{1}{2} (\min(n_2, n_{20}) - \max(n_1, n_{10}))$$
(5)

или

$$N_0 - N = \max(n_1, n_{10}),$$

$$N_0 + N = \min(n_2, n_{20}).$$
(6)

Произведение $F(n) = \varphi_n(z) \varphi_n(z_0)$ как функция n в интервале $N_0 - N \leq n \leq N_0 + N$ имеет один и тот же знак, и, следовательно, группа мод с номерами $N_0 - N \leq n \leq N_0 + N$ будет возбуждаться точечным источником в одинаковой фазе. Оценим ширину этого интервала мод, т. е. число N . Предположим, что в этом интервале номеров можно ограничиться двумя первыми членами разложения ξ_n в ряд в окрестности N_0 :

$$\xi_n \simeq \xi_{N_0} + (n - N_0) \frac{d\xi_{N_0}}{dN_0}.$$
(7)

Вычтем из второго соотношения (3) первое и получим

$$\int_{z_{n_2}^-}^z \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{n_2}^2 \right)^{1/2} dz - \int_{z_{n_1}^-}^z \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{n_1}^2 \right)^{1/2} dz = \pi,$$
(8)

при этом предполагается, что $q_{n_1} = q_{n_2}$, т. е. речь идет о модах одного типа (например, только водных). Используя соотношение (7), запишем:

$$\xi_{n_2} \simeq \xi_{N_0} + (n_2 - N_0) \frac{d\xi_{N_0}}{dN_0}, \quad \xi_{n_1} \simeq \xi_{N_0} - (N_0 - n_1) \frac{d\xi_{N_0}}{dN_0}$$

и в принятом приближении

$$\int_{z_{n_2}^-}^z \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{n_2}^2 \right)^{1/2} dz - \int_{z_{n_1}^-}^z \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{n_1}^2 \right)^{1/2} dz \simeq$$

$$\simeq \int_{z_{N_0}^-}^z \frac{\xi_{N_0} (n_2 - N_0) \frac{d\xi_{N_0}}{dN_0}}{\left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{N_0}^2 \right)^{1/2}} dz - \int_{z_{N_0}^-}^z \frac{\xi_{N_0} (N_0 - n_1) \frac{d\xi_{N_0}}{dN_0}}{\left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{N_0}^2 \right)^{1/2}} dz$$

или

$$\xi_{N_0} \frac{d\xi_{N_0}}{dN_0} (n_2 - n_1) \int_{z_{N_0}^-}^z \frac{dz}{\left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{N_0}^2 \right)^{1/2}} = \pi.$$
(9)

Заметим, что в силу закона Снеллиуса $\xi_{N_0} = \omega \cos \theta_{N_0}(z) / c(z)$ интеграл в выражении (9) может быть записан в виде

$$D(z) = \int_{z_{N_0}^-}^z \operatorname{ctg} \theta(z) dz,$$

и равен горизонтальному расстоянию, которое пробегает от верхней точки поворота луч, соответствующий моде с номером N_0 пока не достигнет глубины z . С другой стороны [2, 3] имеет место соотношение

$$d\xi_{N_0}/dN_0 = -2\pi/D_{N_0},$$
(10)

где D_{N_0} полная горизонтальная длина пробега луча от верхней точки поворота до следующей верхней точки поворота, т. е. длина цикла. Таким об-

разом, для числа мод, синфазно возбужденных в группе, получаем оценку

$$n_2 - n_1 = \frac{1}{2} \frac{D_{N_0}}{D(z)}. \quad (11)$$

Совершенно аналогично, преобразовав соотношение (4), получим, что

$$n_{20} - n_{10} = \frac{1}{2} \frac{D_{N_0}}{D(z_0)}. \quad (12)$$

Заметим, что число синфазно возбужденных мод в группе не превышает величин, определяемых соотношениями (11) или (12), и при достаточно высоких частотах, т. е. когда применимо ВКБ-разложение, не зависит от частоты.

Положим для определенности $n_2 < n_{20}$, $n_1 < n_{10}$ и тогда, используя соотношение (6), можно получить

$$N_0 = \frac{1}{2} (n_{10} + n_{20}), \quad N = \frac{1}{2} (n_2 - n_{10}). \quad (13)$$

Разложим аргументы ВКБ-решений (2) по степеням $n - N_0$ при $N_0 - N \leq n \leq N_0 + N$, причем для $\varphi_n(z)$ сделаем это в окрестности n_2 , а для $\varphi_n(z_0)$ — в окрестности n_{10} :

$$\int_{z_n^-}^z \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_n^2 \right)^{1/2} dz \simeq \int_{z_{N_0+N}^-}^z \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{N_0+N}^2 \right)^{1/2} dz + (N_0 + N - n) \frac{2\pi D(z)}{D_{N_0}} \quad (14)$$

$$\int_n^z \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_n^2 \right)^{1/2} dz \simeq \int_{z_{N_0-N}^-}^z \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{N_0-N}^2 \right)^{1/2} dz + (n - N_0 + N) \frac{2\pi D(z)}{D_{N_0}}.$$

В этом случае, с учетом соотношений (2-4) можно показать, что

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) \varphi_n(z_0) \simeq & (-1)^{m+k} \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{N_0+N}^2 \right)^{-1/4} \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{N_0-N}^2 \right)^{-1/4} \times \\ & \times \sin \left\{ 2\pi \frac{D(z)}{D_{N_0}} (N_0 + N - n) \right\} \sin \left\{ 2\pi \frac{D(z)}{D_{N_0}} (n - N_0 + N) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим поле, создаваемое синфазно возбужденной группой мод

$$U_{N_0}(r, z) = \sum_{N_0-N}^{N_0+N} H_0^{(1)}(\xi_n r) \varphi_n(z) \varphi_n(z_0). \quad (16)$$

Заменив функцию Ханкеля ее асимптотикой, вынося из-под знака суммы медленно меняющиеся множители и учитывая соотношения (7) и (15) получим оценку для U_{N_0} ,

$$\begin{aligned} U_{N_0}(r, z) \sim & \left(\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi_{N_0+N}^2 \right)^{-1/4} (\xi_{N_0} r)^{-1/2} \times \\ & \times \exp(i \xi_{N_0} r) \cdot (-1)^{m+k} \sum_{n=N_0-N}^{N_0+N} \exp \left(i \frac{d \xi_{N_0}}{d N_0} (n - N_0) r \right) \times \\ & \times \sin \left\{ 2\pi \frac{D(z)}{D_{N_0}} (N_0 + N - n) \right\} \sin \left\{ 2\pi \frac{D(-z_0)}{D_{N_0}} (n - N_0 + N) \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для вычисления последней суммы введем обозначения

$$\alpha = \frac{d \xi_{N_0}}{d N_0} r, \quad \beta = 2\pi \frac{D(z)}{D_{N_0}}, \quad \beta_0 = 2\pi \frac{D(z_0)}{D_{N_0}},$$

$$m=n-N_0+N, \quad \varphi = \frac{1}{2}(\beta+\beta_0), \quad \psi = \frac{1}{2}(\beta-\beta_0).$$

В этих обозначениях сумма в выражении (17) записывается в виде

$$S = -\frac{1}{4} \sum_{m=0}^{2N} \exp(i\alpha(m-N)) (\exp(i\beta(2N-m)) - \exp(-i\beta(2N-m))) (e^{i\beta_0 m} - e^{-i\beta_0 m}), \quad (19)$$

т. е. представляет собой сумму 4-х геометрических прогрессий. После несложных, но громоздких выкладок для S получаем выражение

$$S = \frac{1}{4} \left\{ e^{-2iN\psi} \left[\frac{\sin[(2N+1)(\alpha/2+\varphi)]}{\sin(\alpha/2+\varphi)} + \frac{\sin[(2N+1)(\alpha/2+\psi)]}{\sin(\alpha/2+\psi)} \right] + e^{2iN\psi} \left[\frac{\sin[(2N+1)(\alpha/2-\varphi)]}{\sin(\alpha/2-\varphi)} - \frac{\sin[(2N+1)(\alpha/2-\psi)]}{\sin(\alpha/2-\psi)} \right] \right\}. \quad (20)$$

Рассмотрим подробнее одно из 4-х слагаемых в соотношении (20), например первое, вернувшись к исходным обозначениям

$$S_1 = \exp \left\{ -2i\pi N \frac{D(z) - D(z_0)}{D_{N_0}} \right\} \times \frac{\sin \{ 2N+1/2 [d\xi_{N_0}/dN_0 r + 2\pi D(z) + D(z) + D(z_0)/D_{N_0}] \}}{\sin \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{d\xi_{N_0}}{dN_0} r + 2\pi D(z) + D(z_0)/DN_0 \right] \right\}}. \quad (21)$$

При фиксированных z и z_0 S_1 является периодической функцией расстояния r с максимумом порядка N при $r=r_m$, где r_m определяется из уравнения

$$\frac{d\xi_{N_0}}{dN_0} r_m + 2\pi \frac{D(z) + D(z_0)}{D_{N_0}} = -2m\pi, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

(знак минус в первой части стоит, поскольку $(d\xi_{N_0}/dN_0)r < 0$) или

$$r_m = -\frac{2\pi}{d\xi_{N_0}/dN_0} \left(m + \frac{D(z) + D(z_0)}{D_{N_0}} \right). \quad (22)$$

Наконец, с учетом соотношения (10) можно получить

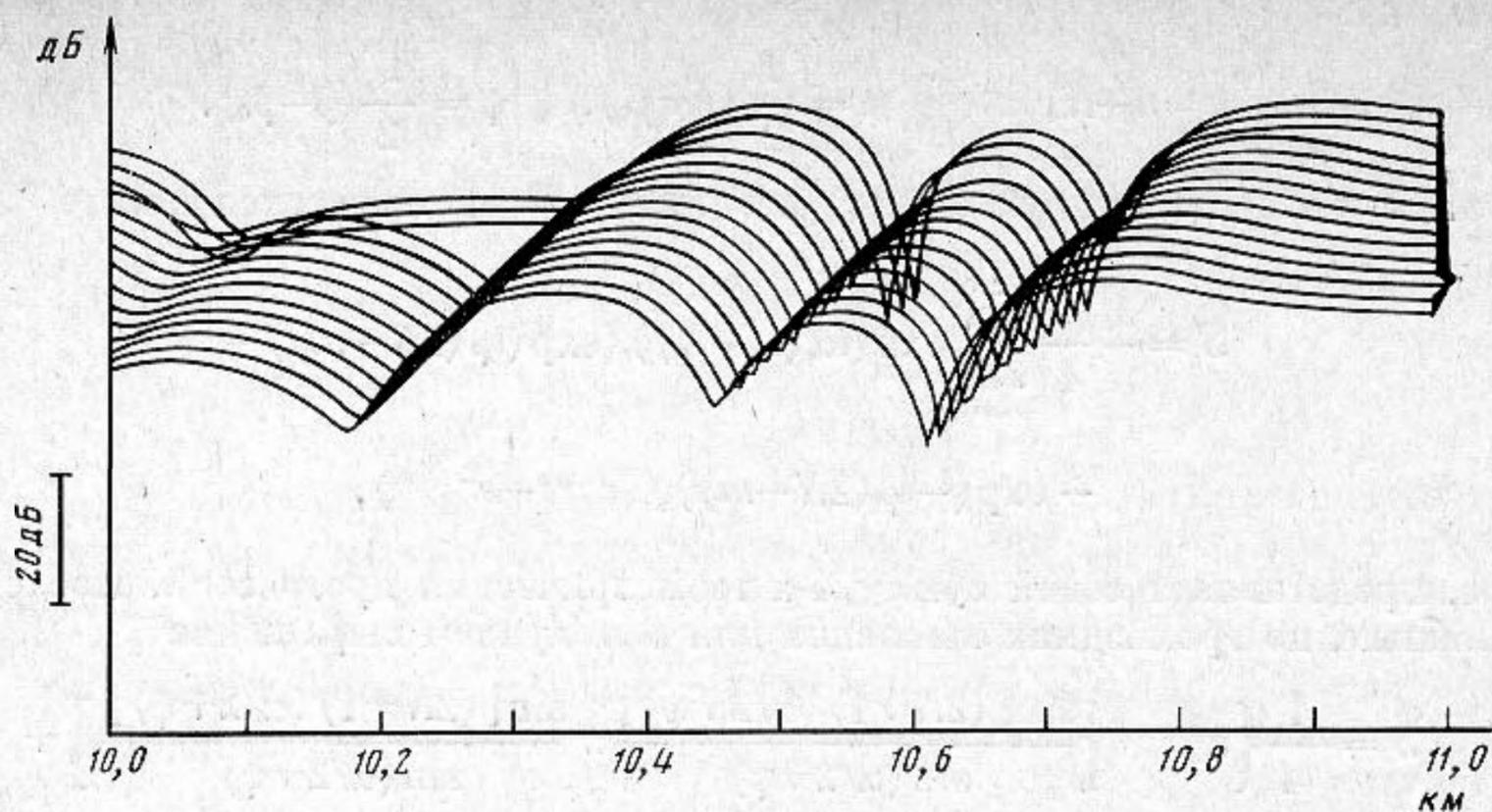
$$r_m = mD_{N_0} + D(z) + D(z_0), \quad (23)$$

что соответствует лучу, соединяющему точки $(0, z_0)$ и (r, z) и совершившему m полных циклов. Совершенно аналогично интерпретируются остальные слагаемые в сумме (20). Рассмотрим теперь, как изменится значение S_1 при малом изменении частоты, а точнее, изменим одновременно и частоту и расстояние, при фиксированных z и z_0 , так, чтобы величина S_1 не изменилась. Поскольку S_1 зависит от частоты только через α , то очевидно, что указанное требование эквивалентно условию

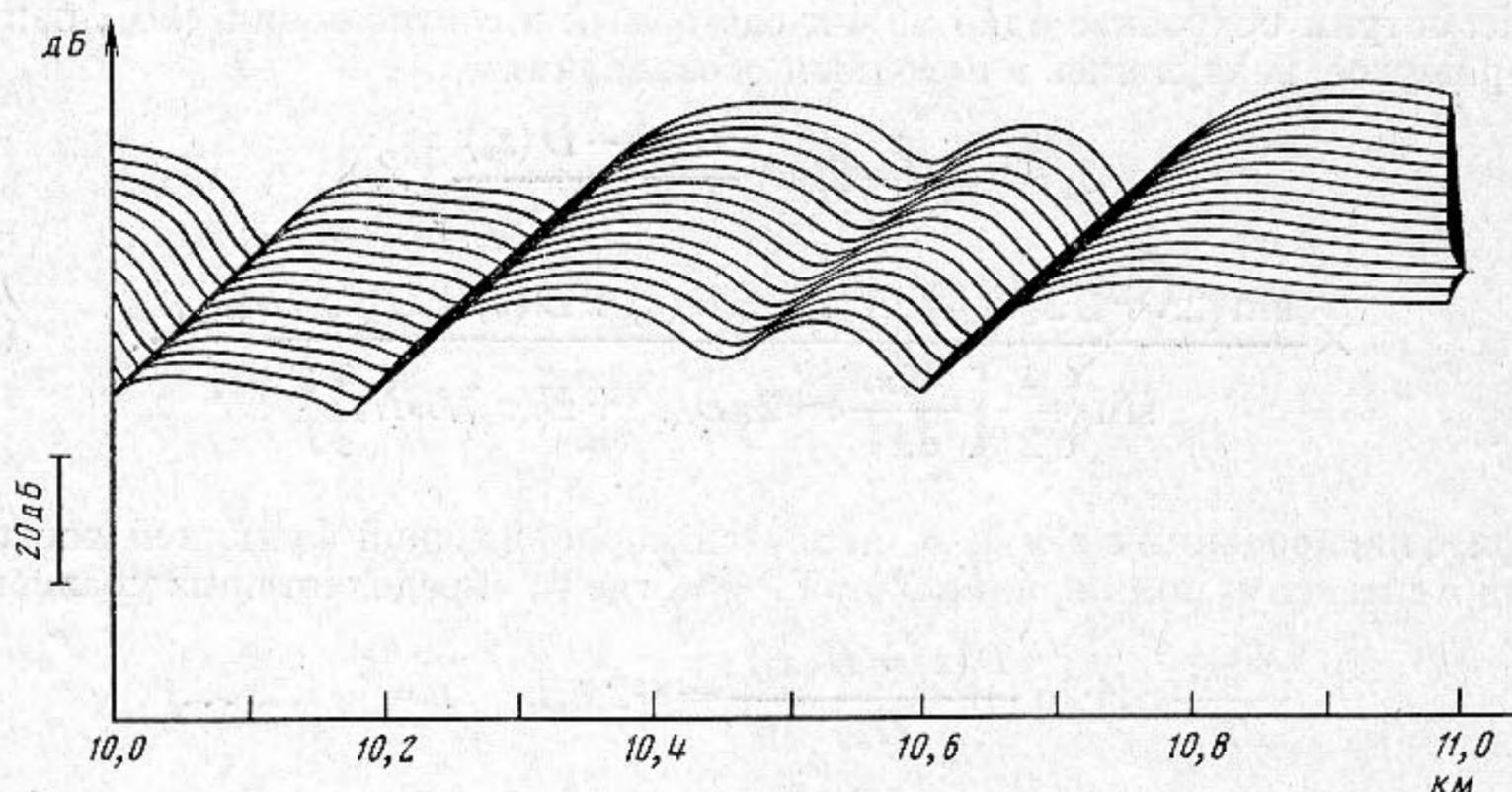
$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial \alpha}{\partial r} dr = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{d\xi_{N_0}}{dN_0} r \right) d\omega + \frac{d\xi_{N_0}}{dN_0} dr = 0. \quad (24)$$

По определению $c_{rN_0} = d\omega/d\xi_{N_0}$, поэтому последнее условие принимает вид

$$\frac{d}{dN_0} \left(\frac{1}{c_{rN_0}} \right) r d\omega + \omega \frac{d}{dN_0} \left(\frac{1}{c_{\phi N_0}} \right) dr = 0$$



Фиг. 1. Пространственно-частотная зависимость уровня звука. Расчет проведен с учетом только незатухающих нормальных волн



Фиг. 2. Пространственно-частотная зависимость уровня звука. При расчете учитывались как незатухающие, так и затухающие моды

ИЛИ

$$\frac{d\left(\frac{1}{c_r}\right)}{d\left(\frac{1}{c_\phi}\right)} \frac{d\omega}{\omega} + \frac{dr}{r} = 0, \quad (25)$$

что соответствует соотношению, использованному в работе [1]. Исходную формулу (24) можно преобразовать и по другому, используя обозначение для $d\xi_{N_0}/dN_0$ из соотношения (10), в результате чего равенство (24) примет вид

$$\frac{dr}{d\omega} = -r D_{N_0} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{D_{N_0}} \right). \quad (26)$$

На фиг. 1 представлены результаты расчета звукового поля при следующих условиях распространения звука. Волновод представляет собой слой воды толщиной 0,4 км с постоянной скоростью звука в воде — 1,5 км/с, лежащий на жидком полупространстве со скоростью звука в нем 1,552 км/с и плотностью 1,6 г/см³. Источник и приемник расположены на глубине 0,1 км. По горизонтальной оси отложено расстояние в км, разные кри-

вые соответствуют разным частотам начиная от 300 Гц — нижняя кривая и до 304,5 Гц через 0,3 Гц.

Для удобства изучения пространственно-частотной зависимости, значения поля, посчитанные для соседних частот, искусственно смещены на 2 дБ относительно друг друга. Слева от фиг. 1 указан масштаб в дБ, что позволяет оценить относительные флуктуации поля. На фиг. 1 виден характерный наклон линий одинакового уровня звукового поля, который в центре фигуры составляет $dr/d\omega \sim 0,0345$ км/Гц. Расчет производился с учетом только распространяющихся нормальных волн. Включение дополнительной моды видно по резкому изменению характера верхних трех кривых. На фиг. 2 приведен тот же расчет, но с учетом затухающих мод,

Таблица

D_{N_0}	$\frac{2\pi\partial}{\partial\omega} \left(\frac{1}{D_{N_0}} \right)$	$\frac{2\pi dr}{d\omega} = -r D_{N_0} 2\pi \times$ $\times \partial/\partial\omega (1/D_{N_0})$	N_0
12,45595	-2,6266-04	0,034369	10
11,36605	-2,8833-04	0,0344271	11
10,45006	-3,140-04	0,0344707	12
9,66934	-3,3966-04	0,0345019	13
8,99593	-3,6533-04	0,034525	14

что привело к сглаживанию общей картины поля. В таблице приведены значения D_{N_0} и $dr/d\omega$ для группы мод, которые синфазно складываются в данном диапазоне расстояний. Видно, что значения хорошо согласуются с полученными в точном расчете поля.

Таким образом, можно сделать вывод, что для локальной оценки структуры звукового поля в координатах частота — расстояние можно пользоваться соотношением (17) с суммой, вычисленной по формуле (19), что дает существенный выигрыш во времени по сравнению с вычислением точного решения, особенно, если при определении параметров, входящих в выражение (19), использовать ВКБ-асимптотики, т. е. лучевые построения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чупров С. Д., Мальцев Н. Е. Инвариант пространственно-частотной интерференционной структуры звукового поля в слоистом океане. — Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 2, с. 475-479.
2. Бреховский Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
3. Толстой И., Клей К. С. Акустика океана. М.: Мир, 1969.

Акустический институт им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
23.XI.1981