АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIX 1983 Вып. 1

УДК 534.222.2

ИМПУЛЬС ДАВЛЕНИЯ, ВОЗБУЖДАЕМЫЙ СФЕРОЙ, РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Петухов Ю. В.

Сравниваются результаты расчета импульса давления, полученные в линейном приближении и с использованием точных уравнений для автомодельной ударной волны. Результаты в приближении Кирквуда-Бёте дают существенно отличающиеся значения для зависимости импульса давления от скорости расширения границ сферы.

Задача об излучении волны сжатия расширяющейся сферой рассмотрена в работах [1—3], где рассчитаны поля давления и скорости в линейном приближении [1], с использованием точных автомодельных уравнений [1, 2] и методом, приближенно учитывающим влияние нелинейных эффектов [3]. Однако вопрос о зависимости импульса волны давления на определенном расстоянии от скорости расширения сферы не обсуждался; это и явилось предметом рассмотрения данной работы.

Импульс давления определяется выражением

$$I=\int_{t_r}^{t_R} p'\,dt, \tag{1}$$

где t_r — время прихода фронта волны в точку с радиусом r, t_R — время, за которое радиус сферы $R(t)$ достигнет положения $r(R(t_R)=r)$; $p'=p-p_0$ — возмущение давления, p_0 — равновесное давление. Предполагается, что среда описывается адиабатическим уравнением состояния $p=p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$, где ρ_0 — равновесная плотность, γ — показатель адиабаты. В дальнейшем удобно рассматривать безразмерную величину импульса давления $J=(c_0/p_0r)I$:

$$J=\int_{\tau_r}^{\tau_R}\frac{p'}{p_0}\,d\tau, \tag{2}$$

где $\tau=tc_0/r$, c_0 — равновесная скорость звука. Вследствие автомодельности задачи профиль волны давления p' и скорости u зависит только от τ [1—3]; кроме этого, при заданной $\alpha=u_R/c_0$ скорости расширения сферы пределы интегрирования в (2) имеют определенные постоянные значения (см. [1, 2]). Следовательно, зависимость импульса давления от расстояния будет линейной функцией r. Используя результаты работ [1, 2], для J в линейном приближении имеем

$$J=\gamma\alpha(1-\alpha)/(1+\alpha) \tag{3}$$

и точное выражение вида

$$J=\int_{\xi_1}^{1}[(\eta e^{2z})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}-1]\frac{\exp^{-z}}{\xi}\cdot\frac{\eta-(1-\xi)^2}{3\eta-(1-\xi)^2}\,d\xi, \tag{4}$$

где $\eta=c^2/c_0^2x^2$ и $z=\ln x$ как функция от $\xi=u/c_0x$ определяются из системы уравнений:

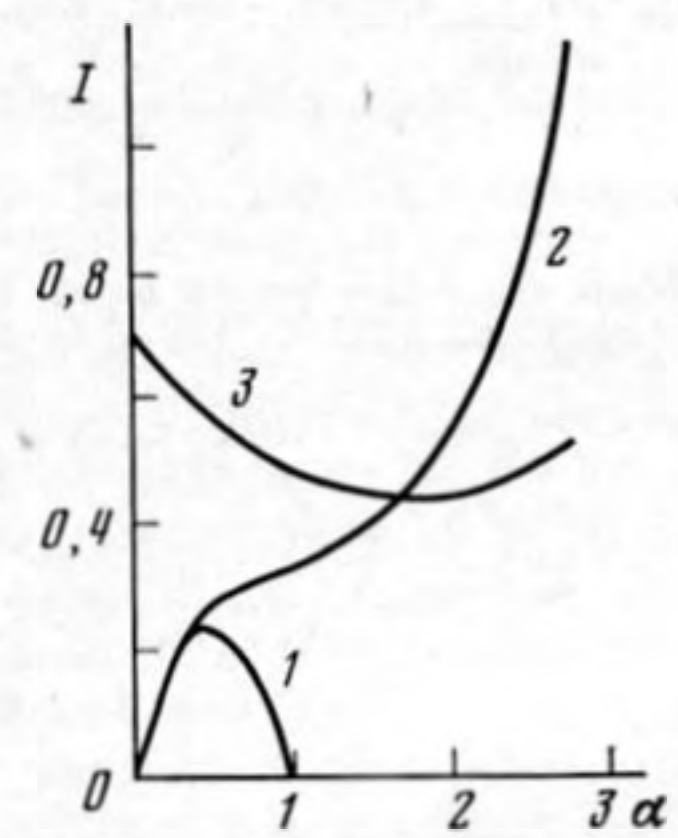
$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{2\eta}{\xi}\cdot\frac{\eta+(\gamma+1)\xi-\gamma\xi^2-1}{3\eta-(1-\xi)^2}, \tag{5}$$

$$\frac{dz}{d\xi}=-\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\eta-(1-\xi)^2}{3\eta-(1-\xi)^2}, \tag{6}$$

решения которой удовлетворяют граничным условиям на ударном фронте, т. е.

$$\begin{gathered}\xi_1=2(y_1-1)/[\gamma-1+(\gamma+1)y_1],\\ \eta_1=2\gamma y_1[\gamma+1+(\gamma-1)y_1]/[\gamma-1+(\gamma+1)y_1]^2,\\ z_1=(1/2)\ln[(\gamma-1+(\gamma+1)y_1)/2\gamma].\end{gathered} \tag{7}$$

Выше использованы следующие обозначения: $x=1/\tau$, $y_1=p_1/p_0$, где p_1 — давление на ударном фронте, c — местная скорость звука. Расчеты безразмерной величины J для точного выражения (4) проводились численно с одновременным численным интегрированием уравнений (5), (6) при условиях (7) для $\gamma=1{,}4$. На фигуре представлены графические зависимости J от α для выражений (3) и (4). Как видно (см. фигуру), в области $\alpha\leqslant 0{,}2$ расчеты по формулам (3) и (4) практически совпадают. При дальнейшем увеличении α линейное решение $J(\alpha)$ проходит через максимум ($\alpha=\sqrt{2}-1$) и уменьшается до нуля, когда скорость расширения сферы сравнивается с равновесной скоростью звука в среде $\alpha=1$ (необходимо помнить, что выражение (3) для $J(\alpha)$ имеет смысл в области малых $\alpha\ll 1$). Точная зависимость $J(\alpha)$ не имеет экстремума. В этом случае скорость нарастания $dJ/d\alpha$ величины J в области $\alpha<1$ уменьшается, а в области $\alpha>1$ возрастает, т. е. точка $\alpha=1$ является точкой перегиба функции $J(\alpha)$.



Зависимость импульса давления волны от скорости расширения сферы при определенном расстоянии r. Кривая *1* характеризует изменение величины $J=(c_0/rp_0)I$ (где I – импульс давления), вычисленной в линейном приближении (3). Аналогично кривые *2* и *3* рассчитаны соответственно из точных выражений (4)–(6) и в приближении Кирквуда-Бёте (8)

Представляет интерес рассчитать зависимость $J(\alpha)$ в приближении Кирквуда-Бёте. Этот метод нашел широкое применение при расчетах поля давления от взрывных источников в жидкости. Если воспользоваться результатами работы [4], то для $J(\alpha)$ нетрудно получить следующее выражение:

$$J=\int\limits_{\chi_1}^{(\alpha a)^{-1}}\left\{\left[\frac{2}{\gamma+1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}y\right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}-1\right\}\left[a+y^{-1}-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{y+1}{y-1}+b\right)\right]d\chi, \tag{8}$$

где $y=(1+\chi)^{1/2}$, a и b — константы, зависящие от α и γ: $a=4/\alpha^2(\gamma+1)\times\times[4+\alpha(\gamma+1)]$, $b=[2+(\gamma+1)\alpha]\Big/\left[\alpha(\gamma+1)\left(1+\frac{\gamma+1}{4}\alpha\right)\right]+\ln[(\gamma+1)\alpha/(4+(\nu+1)\alpha)]$. Нижний предел интегрирования в (8) определяется как корень уравнения вида

$$\chi=\frac{\frac{1}{2}(y+1)-\sqrt{1+\frac{1}{4}(1-y)^2}}{\left[1+ay-\frac{1}{2}y\left(\ln\frac{y+1}{y-1}+b\right)\right]\left[\sqrt{1+\frac{1}{4}(y-1)^2}+\frac{1}{2}(y-1)\right]}. \tag{9}$$

Уравнение (9) имеет два корня. Необходимо взять наибольший, который соответствует ударному фронту; меньший корень соответствует точке в профиле волны давления, где dp'/dx обращается в бесконечность. Результаты численного расчета выражения (8) приведены на фигуре. Как видно, имеется резкое отличие в поведении $J(\alpha)$ от предыдущих расчетов по формулам (3) и (4) в области малых α. При стремлении скорости расширения сферы к нулю импульс давления в приближении Кирквуда-Бете стремится к постоянной величине, равной $\gamma/2$. Это обстоятельство обусловлено тем, что в отличие от линейного приближения, где давление на поверхности сферы при $\alpha \ll 1$ пропорционально α^2, т. е. $p' \approx \gamma 2\alpha^2$, в приближении Кирквуда-Бете оно пропорционально первой степени $\alpha (p' \approx \gamma \cdot \alpha)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Taylor G. L.* The air wave surrounding an expanding sphere.– Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1946, v. 186, p. 273–292.
2. *Седов Л. И.* О некоторых неустановившихся движениях сплошной среды.– ПММ, 1945, т. 9, № 4, с. 293–311.
3. *Наугольных К. А.* Волна сжатия, излучаемая расширяющейся сферой.– Акуст. ж., 1965, т. 11, № 3, с. 351–358.
4. *Акуличев В. А., Богуславский Ю. Я., Иоффе А. П., Наугольных К. А.* Излучение сферических волн конечной амплитуды.– Акуст. ж., 1967, т. 13, № 3, с. 321–328.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 21.XII.1981