$u_{m,n}$, так и $u_{m\pm1,n}$, что делает в общем случае анализ соответствующего дисперсионного уравнения трудно выполнимым. Поэтому далее рассмотрим представляющий наибольший интерес случай главного параметрического резонанса ($m=0, -1$). При этом можно учитывать только члены с $u_{0,n}$, $u_{-1,n}$ ($n=0, 1$). Определив из формулы (2) $u_{-1,n}/u_{0,n}$, после несложных, но громоздких выкладок, получим из системы (4) дисперсионное уравнение, которое запишем следующим образом

$$\tau_1\tau_2(\tau_1+\tau_2)=\frac{\delta k}{1+\varepsilon_{a,s}}(\tau_1^2+\tau_2^2-k^2\delta/2), \tag{5}$$

где

$$\tau_{1,2}=\bar{s}^{-1}\{k^2\bar{s}^2-\Omega^2-2\omega_н(\omega_н-\Omega)\pm$$
$$\pm\sqrt{4\omega_н^2(\Omega-\omega_н)^2+\delta^2\Omega^2(\Omega-2\omega_н)^2/4}\}^{1/2}.$$

Учитывая, что $\delta\ll1$, решение уравнения (5) будем искать в виде $\Omega=k\bar{s}+\Omega'$, где малая поправка $|\Omega'|\ll k\bar{s}$ обусловлена наличием поля ($\delta\neq0$). В окрестности резонанса $k\bar{s}=\omega_н+\theta$, где θ – малая расстройка, $\tau_{1,2}=(2k/\bar{s})^{1/2}\{\theta\pm[(\Omega'-\theta)^2+\delta^2k^2\bar{s}^2/16]^{1/2}\}^{1/2}$, а уравнение (5) имеет вид

$$\tau_1\tau_2(\tau_1+\tau_2)=\frac{\delta k^3}{1+\varepsilon_{a,s}}(4\theta/k\bar{s}-\delta/2). \tag{6}$$

Видно, что при $\theta<\delta k\bar{s}/8$ правая часть (6) отрицательна, и, следовательно, в этом случае действительные или комплексно сопряженные значения $\tau_{1,2}$ с $\mathrm{Re}\,\tau_{1,2}>0$ не удовлетворяют уравнению (6). Непосредственно в точке резонанса $k\bar{s}=\omega_н$ можно представить $\tau_{1,2}$ в виде $\tau_1=i\tau_2$, $\tau_2=\Delta^{1/4}k$, где $\Delta=4\Omega'^2/k^2\bar{s}^2+\delta^2/4$. При этом из выражения (6) находим $\tau_{1,2}=-k\delta^{2/3}(1+\varepsilon_{a,s})^{-1/3}(\pm i)^{1/2}2^{-1/6}$ (берутся главные значения). Нетрудно видеть, что найденные значения $\tau_{1,2}$ несовместимы с условиями локализации волн $\mathrm{Re}\,\tau_{1,2}>0$. Это означает, что в точке резонанса поверхностные волны распространяться не могут. Заметим, что это обстоятельство было упущено в работе [4], где рассматривалась подобная параметрическая неустойчивость волн в полуограниченных кристаллах. В случае бесконечно узкой щели $kh\to0$ этот вывод остается справедливым только для антисимметричных волн. Симметричные волны при $kh=0$ становятся объемными и приобретают инкремент $\Omega'=-i\delta\omega_н/4$ [5].

Дисперсионное уравнение (6) решалось численно. Численный счет показал, что спектр поперечных щелевых поверхностных акустических волн в полуограниченных кристаллах, помещенных в СВЧ электрическое поле, имеет зону непропускания в области параметрической неустойчивости. Глубина локализации волн в области параметрического возбуждения равна $L\simeq10\lambda$ для характерных параметров кристаллов типа $SrTiO_3$ (λ – длина акустической волны) при $\varepsilon_н=1$ кВ/см, что существенно меньше, чем в нерезонансной области. Ширина зоны непропускания $\Delta\omega/\omega_н$ равна $\sim10^{-3}\div10^{-4}$ при $\delta\sim10^{-2}\div10^{-3}$ для $SrTiO_3$. Поэтому рассмотренный эффект представляет значительный интерес при создании управляемых фильтров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1959.
2. *Gylyaev Y. V., Plessky V. P.* Shear Surface Acoustic Waves in Dielectrics in the Presence of an Electric Field.– Phys. Lett., 1977, v. 56 A, № 6, p. 491–492.
3. *Бурлак Г. Н., Коцаренко Н. Я., Кошевая С. В.* Поверхностные акустоэлектрические волны на границе раздела двух сред, обусловленных электрострикцией.– ФТТ, 1976, т. 18, № 5, с. 1222–1225.
4. *Бурлак Г. Н., Коцаренко Н. Я.* Параметрическое возбуждение поперечных поверхностных акустических волн в твердых телах СВЧ электрическим полем.– Письма в ЖТФ, 1981, т. 7, № 12, с. 712–715.
5. *Бурлак Г. Н., Коцаренко Н. Я.* Об одном типе параметрической неустойчивости акустических волн в твердом теле.– ФТТ. 1981, т. 23, № 2, с. 641–643.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступила в редакцию
22.VII.1982

УДК 534.26

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ИЗГИБНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЕ ЧЕРЕЗ АКУСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ

Кирпичников В. Ю., Савенко В. В.

На взаимосвязь изгибных и продольных колебаний пластины при ее контакте с акустической средой впервые указывалось Л. М. Лямшевым [1]. Однако степень их влияния друг на друга при звукоизлучении пластины не исследовалась.

Целью настоящей работы является теоретическая оценка взаимодействия через

акустическую среду изгибных и продольных колебаний в бесконечной однородной пластине. Частотный диапазон рассмотрения ограничен сверху частотой, на которой длина сдвиговой волны в пластине приблизительно равняется удвоенной ее толщине. Для металлических пластин, контактирующих с водой, эта частота примерно в 6 раз выше частоты совпадения $f_{гр}$. Пластина толщиной h, расположенная в плоскости xoy, граничит с акустической средой $z \geqslant h/2$ и возбуждается гармонической силой с амплитудой F и круговой частотой ω, действующей вдоль оси y под углом φ к поверхности пластины. Изгибные колебания $w(x)$ вызывает компонента силы, ориентированная в направлении нормали к поверхности, $F \sin \varphi$:

$$D\left[\frac{\partial^4}{\partial x^4}+(k_п^2+k_с^2/k_1^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_п^2k_с^2/k_1^2-k_и^4\right]w(x)=$$

$$=\left(1-a\frac{\partial^2}{\partial x^2}-ak_п^2\right)\cdot[F\sin\varphi\delta(x)-p(x,z=h/2)], \qquad (1)$$

а продольные $u(x)$ – как компонента силы, действующая в плоскости пластины, $F\cos\varphi$, так и поперечная компонента за счет эффекта Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+k_п^2u=-\frac{1-\sigma^2}{Eh}F\cos\varphi\delta(x)+\frac{\sigma(1+\sigma)}{2E}\frac{\partial}{\partial x}[F\sin\varphi\delta(x)+p(x,z=h/2). \qquad (2)$$

Граничное условие, отражающее непрерывность смещений среды и пластины в слое $z=h/2$, запишем в форме [2]

$$\frac{1}{\rho_0\omega^2}\frac{\partial p(x,z=h/2)}{\partial z}=w(x)-\frac{h}{2(\lambda+2\mu)}p(x,z=h/2)+\frac{\lambda h}{2(\lambda+2\mu)}\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) приняты следующие обозначения: D – изгибная жесткость пластины; $k_п$, $k_с$, $k_и$ – волновые числа продольных, сдвиговых и изгибных колебаний пластины в вакууме; k_1 – корень уравнения $4\sqrt{(1-k_1^2\alpha)(1-k_1^2)}=(2-k_1^2)^2$; $\alpha=(1-2\sigma)/2(1-\sigma)$; $a=h^2/6k_1^2(1-\sigma)$; E, σ, λ, μ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и постоянные Ламе материала пластины: ρ_0 – плотность среды.

Используя выражения (1)–(3), а также уравнение Гельмгольца для звукового давления $p(x, z)$, можно получить следующую систему уравнений с неизвестными трансформантами Фурье смещений $w(\alpha)$ и $u(\alpha)$:

$$[DB(\alpha)-L(\alpha)S(\alpha)]w(\alpha)+i\alpha T(\alpha)L(\alpha)u(\alpha)=L(\alpha)F\sin\varphi,$$

$$i\alpha\sigma_e S(\alpha)w(\alpha)+[-\alpha^2+k_п^2+\sigma_e T(\alpha)\alpha^2]u(\alpha)=-\frac{1-\sigma^2}{Eh}F\cos\varphi+i\alpha\sigma_e F\sin\varphi, \qquad (4)$$

где $B(\alpha)=\alpha^4-(k_п^2+k_{с1}^2)\alpha^2+k_п^2k_{с1}^2-k_и^4$, $k_{с1}=k_с/k_1$ $L(\alpha)=1-ak_п^2+a\alpha^2$, $S(\alpha)=\rho_0\omega^2/A(\alpha)$, $A(\alpha)=\sqrt{\alpha^2-k_0^2}+\rho_0\omega^2h/2(\lambda+2\mu)$, $T(\alpha)=S(\alpha)\lambda h/2(\lambda+2\mu)$, $\sigma_e=\sigma(1+\sigma)/2E$, k_0 – волновое число звука в среде. В системе (4) влияние продольных колебаний на изгибные определяется слагаемым $i\alpha T(\alpha)L(\alpha)u(\alpha)$ в левой части первого уравнения. Слагаемое $i\alpha\sigma_e S(\alpha)w(\alpha)$ во втором уравнении характеризует влияние изгибных колебаний на продольные. Взаимодействие указанных типов колебаний отражает также слагаемое $\rho_0\omega^2h/2(\lambda+2\mu)$ в знаменателе произведения $L(\alpha)S(\alpha)$.

Определитель системы (4), приравненный нулю, является дисперсионным уравнением совместных изгибных и продольных колебаний пластины с учетом реакции акустической среды. Пронормировав все его члены величиной Dk_0^6 получим

$$(\varkappa^4-d_1\varkappa^2+d_2-\beta^2)(-\varkappa^2+\beta_1+\sigma_e T(\varkappa)\varkappa^2)-L(\varkappa)S(\varkappa)(-\varkappa^2+\beta_1)=0, \qquad (5)$$

где $\varkappa$ – безразмерное волновое число совместных изгибных и продольных колебаний пластины, $\varkappa=\alpha/k_0$; $L(\varkappa)=1-ak_п^2+ak_0^2\varkappa^2$; $S(\varkappa)=b\beta^3/[\sqrt{\varkappa^2-1}-b\beta^3(k_0h)^4(1-2\sigma)/24(1-\sigma)^2]$; $\sigma_e T(\varkappa)=\sigma^2(k_0h)^4S(\varkappa)/48(1-\sigma)^2$; $\beta=f_{гр}/f$; $\beta_1=k_п^2/k_0^2$; d_1, d_2, b – безразмерные коэффициенты, зависящие от свойств материала пластины и среды; $d_1=(k_п^2+k_{с1}^2)/k_0^2$; $d_2=k_п^2k_{с1}^2/k_0^4$; $b=\rho_0c_п/2\rho c_0\sqrt{3}$ (ρ – плотность материала пластины, $c_п$ и c_0 – скорости распространения продольных волн в пластине и звука в среде).

Уравнение (5) является уравнением 14-го порядка. Из его корней, которые с учетом обозначений, принятых в работе [3], могут быть записаны в форме $\varkappa_{1,2}=\pm a_0$, $\varkappa_{3,4,5,6}=\pm a_1\pm ib_1$, $\varkappa_{7,8,9,10}=\pm a_2\pm ib_2$, $\varkappa_{11,12,13,14}=\pm a_3\pm ib_3$, физический смысл имеют 8 корней, соответствующих выбранному знаку временной зависимости возбуждающей силы. Анализ дисперсионных уравнений, составленных раздельно для изгибных и продольных колебаний пластины с учетом реакции акустической среды [3, 4], показывает, что число таких корней равняется 6 и 4 соответственно. Можно было ожидать, что при отсутствии взаимного влияния изгибных и продольных колебаний через среду суммарное число соответствующих корням волн, возникающих в пластине при ее возбуждении, должно равняться 10. Взаимодействие рассматриваемых типов упругих колебаний через акустическую среду при одностороннем с ней контакте уменьшает число этих волн в пластине до 8.

β	a_0	a_1	a_3	a_3	b_1	b_2	b_3
0,25	1,0031	0,7394	0,1393	0,2199	0,1319	0,1345	0,3209
0,05	1,0078	0,8687	0,1271	0,2575	0,1204	0,5844	0,09064
1	1,0961	1,0624 1,5380	0,0935	0,2861	0,0809	0,9120	0,0519
2	1,3946	1,0591 1,8542	0,0815	0,2965	–	1,3531	0,0265
4	2,1723	1,1561 2,4417	0,1191	0,2933	–	1,9676	0,0123
8	3,0920	1,5114	0,2304	0,2999	–	2,8703	0,0048
16	4,4441	2,7824	0,4470	0,3000	0,3315	4,1009	0,0016
32	6,4415	4,1112	0,8315	0,3000	1,4340	5,9493	0,0005
64	9,4040	6,2147	1,4829	0,3000	2,9357	8,6909	0,0002

Покажем, что при колебаниях металлических пластин в воде из двух незатухающих волн, одна из которых возникает в пластине только при изгибных, а другая – только при продольных колебаниях, в рассматриваемом случае одностороннего контакта с водой остается лишь одна незатухающая волна. Первая из этих волн соответствует вещественному корню $\varkappa_{1,2}\approx\pm a_0$. На низких частотах ($\beta\gg1$) величина $a_0\gg1$ [3]. Безразмерное волновое число второй незатухающей волны, которая возникает при продольных колебаниях пластины, на всех частотах по величине равняется ±1 [4]. Отметим, что незатухающие волны на всех частотах при продольных колебаниях и в области частот $\beta\leqslant1$ при изгибных колебаниях обусловлены воздействием на пластину звуковых колебаний, распространяющихся без потерь в акустической среде.

На низких частотах незатухающая волна, формируемая изгибными колебаниями металлической пластины, интенсивно взаимодействует через воду с аналогичной волной при продольных колебаниях, что приводит к вырождению последней. Действительно, используя условие $\sigma_e T(\varkappa)\ll1$, что равнозначно неравенству $\varkappa^2\gg1$, справедливому для незатухающей волны при изгибных колебаниях пластины на низких частотах ($\beta\gg1$), уравнение (5) можно представить в виде произведения дисперсионного уравнения изгибных колебаний пластины с учетом реакции среды на известное выражение для продольных колебаний $(-\varkappa^2+\beta_1)$. Из последнего уравнения следует, что на указанных частотах под действием продольной компоненты силы в пластине возникает лишь одна волна с $\varkappa_{11,12,13,14}\approx\pm\sqrt{\beta_1}$. Расчеты корней уравнения (5), выполненные для случая колебаний стальной пластины на поверхности воды ($b=0{,}13$), показывают, что за счет звукоизлучения в воду эта волна затухает даже при отсутствии внутренних потерь колебательной энергии в пластине (см. таблицу).

В этой таблице величина a_3 при $\beta=64$, 32 и 16 равняется $\sqrt{\beta_1}=0{,}3$, а величина $b_3\neq0$. Из таблицы также видно, что волна с $\varkappa=\pm1$ в пластине на низких частотах не возникает, а влияние через воду продольных колебаний на изгибные оказывается пренебрежимо малым. О последнем свидетельствует, в частности, совпадение при $\beta\gg1$ величин a_0, a_1, a_2, b_1 и b_2 в приведенной таблице с данными работы [5].

При колебаниях металлических пластин в воде на высоких частотах ($\beta\to1$ и $\beta\leqslant1$) корни дисперсионных уравнений изгибных и продольных колебаний оказываются близкими по величине. Здесь происходит более заметное взаимодействие соответствующих им волн в пластине через воду. Оно приводит, в частности, к появлению незатухающей волны с волновым числом, незначительно отличающимся от 1 (см. в таблице величину a_0 при $\beta\leqslant1$), общей для изгибных и продольных колебаний пластины. Одновременно на высоких частотах, особенно в области $\beta\leqslant1$, изменяются фазовые скорости распространения изгибных и продольных волн в стальной пластине, а также практически всегда увеличиваются потери на излучение звука. Взаимодействие упругих волн через воду приводит на этих частотах к уменьшению скоростей изгибных (особенно $\varkappa_{7,8,9,10}$) и к увеличению скоростей продольных волн. Первый вывод следует из сопоставления приведенных данных с результатами работы [5], а второй – из анализа величины a_3 в приведенной таблице.

Авторы выражают благодарность В. Н. Евсееву за полезное обсуждение результатов работы, а также А. А. Журавлевой за помощь в выполнении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лямшев Л. М.* Отражение звука тонкими пластинами и оболочками в жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1955, с. 11–17.
2. *Молотков Л. А.* Распространение волн в средах, содержащих тонкие упругие слои. Вопросы динамической теории сейсмических волн. Л.: Изд-во ЛГУ, 1962, № 5.
3. *Ляпунов В. Т., Никифоров А. С.* Виброизоляция в судовых конструкциях. Л.: Судостроение, 1975, с. 154.
4. *Евсеев В. Н., Иванов В. С., Кирпичников В. Ю.* Излучение звука бесконечной тонкой пластиной, возбуждаемой продольной силой.– Акуст. ж., 1977, т. 23, № 5.

5. *Журавлева А. А., Иванов В. С., Кирпичников В. Ю.* О корнях дисперсионного уравнения изгибных колебаний пластины.– Акуст. ж., 1982, т. 28, № 5, с. 645.

Поступила в редакцию
26.IV.1982

УДК 534.874

О ВЗАИМНОМ СПЕКТРЕ ИЗЛУЧЕННОГО ШУМОВОГО СИГНАЛА С ОТРАЖЕННЫМ ОТ СЛОИСТОГО ДНА ОКЕАНА

Краснобородько В. В.

В ряде практических задач акустики приходится сталкиваться с рассеянием шумовых сигналов от дна и поверхности океана. В связи с этим изучение спектрально-корреляционных характеристик таких сигналов представляет большой интерес.

В работе [1] приведен расчет функции взаимной корреляции $B(\tau)$ излученного шумового сигнала с отраженным от слоистого дна океана, при этом модель дна выбрана в виде N слоев со статистически неровными границами

$$B(\tau)=\sum_{n=0}^{N}\frac{V_n}{\sqrt{1+P_n^2(\nu)}}\exp\left[\frac{-(\nu\tau_n/2)^2-P_n^2(\omega_0)}{1+P_n^2(\nu)}\right]\cos\left[\frac{\omega_0\tau_n}{1+P_n^2(\nu)}\right], \qquad (1)$$

где V_n – коэффициент отражения от n-й ровной границы среды, $\omega_0=2\pi f_0$, f_0 – центральная частота, ν – ширина спектральной полосы шумового сигнала, $\tau_n=\tau-\Delta t_n$, Δt_n – двойное время прохождения звука n верхних слоев дна океана, $P_n(\omega)$ – параметр Рэлея для n-й границы на частоте ω с учетом вышележащих слоев.

Энергетический спектр излученного шумового сигнала задавался в виде

$$S(\omega)=\frac{1}{2\nu\sqrt{\pi}}\left\{\exp\left[-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\nu}\right)^2\right]+\exp\left[-\left(\frac{\omega+\omega_0}{\nu}\right)^2\right]\right\}. \qquad (2)$$

Из анализа формулы (1) следует, что при наличии N слоев функция взаимной корреляции $B(\tau)$ имеет $N+1$ пик, соответствующий значениям $\tau_n=0$. Подробный анализ выражения, определяющего величину $B(\tau)$, дан в работе [1].

Кроме функции взаимной корреляции важной характеристикой рассеянного шумового сигнала является взаимный спектр излученного шумового сигнала с отраженным от слоистого дна океана, расчет и анализ которого проведены в настоящей работе. Выполнив преобразование Фурье взаимной корреляционной функции, получим

$$G(\omega)=\sum_{n=0}^{N}V_n\exp\left[-\frac{P_n^2(\omega_0)}{1+P_n^2(\nu)}+i\omega\Delta t_n\right]\cdot S_n(\omega), \qquad (3)$$

где

$$S_n(\omega)=\frac{1}{2\nu\sqrt{\pi}}\left\{\exp\left[-\left(\frac{\omega+\omega P_n^2(\nu)-\omega_0}{\nu\sqrt{1+P_n^2(\nu)}}\right)^2\right]+\exp\left[-\left(\frac{\omega+\omega P_n^2(\nu)+\omega_0}{\nu\sqrt{1+P_n^2(\nu)}}\right)^2\right]\right\}.$$

Поскольку взаимная корреляционная функция не обладает свойством четности, то взаимный спектр в рассматриваемом случае есть комплексная величина. Действительная часть $G(\omega)$ или, как ее еще называют [2], синфазная составляющая взаимного спектра на частотах $f_{mn}=(m+{}^1/_2)/(2\Delta t_n)$, где m – целое число, будет иметь локальные минимумы, величины которых существенно зависят от коэффициентов отражения и параметров Рэлея границ. Заметим, что самая низкая частота локального минимума взаимного спектра равна $1/(4\Delta t_N)$, где Δt_N – двойное время прохождения всей системы из N слоев. Следовательно, измерив эту минимальную частоту, можно оценить эффективную толщину слоев дна.

Таким образом, наличие слоев на дне приводит к существенному изменению взаимного спектра. На синфазной составляющей взаимного спектра появляется ряд частотных просечек или интерференционных полос. Эти частотные просечки будут тем ярче, чем меньше параметр Рэлея и выше коэффициент отражения от каждой из границ слоистого дна океана.

При малых параметрах Рэлея на границах слоев, т. е. при $P_n(\omega)\ll 1$ и, следовательно, $P_n(\nu)\ll 1$, соотношение (3) приводится к виду

$$G(\omega)=S(\omega)\sum_{n=0}^{N}V_n\exp(i\omega\Delta t_n). \qquad (4)$$

Анализируя полученное выражение, можно показать, что в этом случае взаимный спектр излученного шумового сигнала с отраженным от дна равен спектру излученного шума, но промодулированного суммой гармонических функций. Синфазная составляющая взаимного спектра на частотах, удовлетворяющих уравнению