АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 3

ОДНОМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СРЕДНИХ СИЛ В АКУСТИКЕ

Данилов С. Д., Миронов М. А.

Рассмотрена задача о средних силах, действующих в одномерном случае на препятствия в поле волн. Получено выражение, описывающее эти силы и справедливое для любого первичного поля и любого препятствия. Обсуждается влияние амплитуд первичного и рассеянного поля и разности фаз между ними на формирование средних сил.

Задача о силе радиационного давления, действующей на малое препятствие, помещенное в поле звуковой волны, неоднократно рассматривалась в литературе. Однако в рамках этой проблемы все еще остается целый ряд вопросов, требующих разрешения. Известно (см. например работу [1]), что в идеальной среде сила радиационного давления, действующая на малую сферическую частицу, пропорциональна малой величине $(kR)^4$ в поле плоской бегущей волны и (kR) в поле плоской стоячей волны. Хотя соответственные расчеты в указанных двух случаях провести нетрудно, до сих пор не обсуждались физические основания для столь сильной зависимости силы радиационного давления от конфигурации первичного поля. Расчет влияния диссипативных свойств среды (вязкости) на силу радиационного давления впервые проведен в работе [2]. Оказалось, что наличие в среде диссипативных процессов приводит к значительному увеличению силы радиационного давления. Физические основания для такого сильного влияния диссипативных процессов, однако, также пока не вполне ясны.

Для разъяснения указанных вопросов — влияние конфигурации первичного поля и свойств среды, в которой находится препятствие, на силу радиационного давления — в настоящей работе рассматривается одномерная модель формирования силы радиационного давления. В качестве одномерной модели среды и препятствия, на которое действует сила радиационного давления, выбраны физическая струна и надетое на нее колечко (впервые такая модель для изучения силы радиационного давления была использована Рэлеем [3].)

Если со стороны колечка на струну действует некоторая поперечная сила, то на струне в этом месте образуется угол (разрыв касательной) и сила, действующая со стороны струны на колечко оказывается отклоненной от перпендикуляра к невозмущенному положению струны. Среднее по времени значение компоненты силы в направлении вдоль струны и есть искомая средняя сила.

Будем рассматривать гармонические колебания и волны; циклическую частоту обозначим через ω. Временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать. Выберем начало координат в точке нахождения колечка, ось x направим вдоль невозмущенного положения струны.

Обозначим первичное поле, т. е. поле на струне в отсутствие на ней колечка, через $u^0(x)$. Колечко возбуждает на струне дополнительное рассеянное поле, которое обозначим $u'(x)$. Суммарное поле $u^0(x)+u'(x)$ при $x=0$ должно удовлетворять условию равенства смещений струны по обе стороны от колечка: $u'(x)|_{-0}=u'(x)|_{+0}$ и условию равенства нулю суммы сил, действующих на точку струны под колечком в поперечном направлении:

$$0=T(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)+F\approx T(\alpha_1-\alpha_2)+F. \qquad (1)$$

Здесь α_1 и α_2 — углы наклонов струны справа и слева от колечка, T — сила натяжения струны, F — поперечная сила, с которой колечко действует на струну.

Горизонтальная проекция равнодействующей натяжения струны $\Phi = T(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$ и отлична от нуля лишь во втором порядке малости относительно углов наклона струны. Усредняя ее по времени, получим в этом приближении искомую среднюю силу, с которой струна действует на колечко в продольном направлении:

$$\Phi = \frac{T}{8}\overline{[-(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)^* - (\alpha_1+\alpha_2)^*(\alpha_1-\alpha_2)]}. \tag{2}$$

В этом выражении черта означает усреднение по времени, звездочка — комплексное сопряжение, сила Φ — одномерный аналог средней силы, действующей на препятствие в трехмерном случае.

Сумма углов наклона струны справа и слева от колечка $(\alpha_1+\alpha_2)$ равна удвоенному наклону в первичном поле:

$$(\alpha_1+\alpha_2) = 2\partial u^0 x/\partial x. \tag{3}$$

Подставляя соотношения (1) и (3) в формулу (2) найдем

$$\Phi = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u^0(x)}{\partial x}F^* + \frac{\partial u^0(x)^*}{\partial x}F\right). \tag{4}$$

Эта формула справедлива для любого первичного поля и любого воздействия колечка на струну. Анализ ее показывает, что сила радиационного давления на колечко полностью определяется наклоном струны в первичном поле в точке нахождения колечка и величиной приложенной к струне поперечной силы. Далее, выражение (4) может быть записано в виде

$$\Phi = \frac{1}{4}\left|\frac{\partial u^0(x)}{\partial x}\right|\left|F\right|\cos\varphi, \tag{5}$$

где φ — разность фаз между наклоном струны в первичном поле и приложенной к струне поперечной силой. Таким образом сила радиационного давления зависит как от амплитуд наклона струны в первичном поле и поперечной силы, приложенной к струне, так и от разности фаз между ними. Это обстоятельство приводит к тому, что в различных условиях сила радиационного давления ведет себя по-разному. В частности, если наклоны струны и поперечная сила колеблются почти в фазе или почти в противофазе, сила радиационного давления, действующая на колечко, велика. Если сдвиг по фазе близок к четверти или трем четвертям периода, сила радиационного давления мала при тех же амплитудах наклона в первичном поле и поперечной силы.

Проиллюстрируем полученные формулы примерами. Вычислим силу радиационного давления, действующую на массивное колечко с массой m в случаях бегущей $u^0(x) = u_0 e^{ikx}$ и стоячей $u^0(x) = u_0 \cdot 2\cos k(x-x_0)$ первичных волн. Поперечная сила, с которой колечко действует на струну, равна для первичной бегущей волны

$$F = (m\omega^2 u_0 2)/(2 + m\omega^2/ikT) \tag{6}$$

и для первичной стоячей волны

$$F = \frac{m\omega^2 u_0 2}{2 + m\omega^2/ikT} 2\cos kx_0. \tag{7}$$

Наклон струны в первичном поле для бегущей волны

$$\partial u^0(x)/\partial x = u_0 ik \tag{8}$$

и для стоячей волны

$$\partial u^0(x)/\partial x = -2u_0 k \sin kx_0. \tag{9}$$

Из соотношения (4) найдем, что сила радиационного давления, действующая на массивное колечко в поле бегущей волны, определяется выраже-

нием

$$\Phi=\bar{E}\cdot 2\frac{z^2}{4+z^2}, \tag{10}$$

а в поле стоячей волны

$$\Phi=\bar{E}\sin 2kx_0\frac{-4z}{4+z^2}. \tag{11}$$

Здесь введены обозначения $z=m\omega^2/kT$, $\bar{E}$ — средняя плотность энергии в первичном поле; в случае бегущей волны $\bar{E}=T(ku_0)^2/2$, в случае стоячей волны $\bar{E}=T(ku_0)^2$.

Сравнивая соотношения (10) и (11), находим, что при одинаковой плотности энергии в первичном поле сила радиационного давления, действующая на колечко в поле стоячей волны на низких частотах, намного превышает силу радиационного давления в поле бегущей волны (исключение составляют области вблизи узлов или пучностей смещения в поле стоячей волны). Причина такого сильного различия заключается в фазовых соотношениях между первичным и рассеянным полем для этих двух случаев. Действительно, как видно из анализа формул (6) и (8), для бегущей волны при стремлении частоты к нулю разность фаз между наклоном струны в первичном поле $\partial u^0(x)/\partial x$ и поперечной силой F стремится к $-\pi/2$. Для случая стоячей волны разность фаз между наклоном струны в первичном поле $\partial u^0(x)/\partial x$ и поперечной силой F стремится к нулю или π (в зависимости от знаков $\sin kx_0$ и $\cos kx_0$). Произведение амплитуд наклона струны в первичном поле и поперечной силы составляет для бегущей волны величину

$$\left|\frac{\partial u^0(x)}{\partial x}\right|\left|F\right|=\frac{\bar{E}\cdot 4z}{(4+z^2)^{1/2}} \tag{12}$$

и для стоячей волны — величину

$$\left|\frac{\partial u^0(x)}{\partial x}\right|\left|F\right|=\frac{\bar{E}4z2\sin kx_0\cos kx_0}{(4+z^2)^{1/2}}. \tag{13}$$

При одинаковой плотности энергии в первичном поле величины (12) и (13) имеют одинаковый порядок, если колечко находится вдали от узлов или пучностей смещения в стоячей волне.

Наиболее интересно рассмотреть влияние диссипативных процессов на силу радиационного давления. Пусть на массивное колечко при его колебаниях действует в поперечном направлении сила трения, пропорциональная поперечной скорости колечка

$$f=-\beta\frac{\partial(u^0(x)+u'(x))}{\partial t}.$$

Выражения для сил, с которыми колечко действует на струну, могут быть получены из формул (6) и (7) заменой в них $m\omega^2\to m\omega^2+i\beta\omega$. В результате получим, что в случае бегущей волны поперечная сила

$$F=\frac{(i\beta\omega+m\omega^2)u_0 2}{(2+\beta\omega/kT)+m\omega^2/ikT}, \tag{14}$$

а в случае стоячей волны

$$F=\frac{(i\beta\omega+m\omega^2)u_0 4\cos kx_0}{(2+\beta\omega/kT)+m\omega^2/ikT}. \tag{15}$$

Для первичного поля в виде бегущей волны, подставляя соотношения (14), (8) в формулу (4), находим следующее выражение для силы радиационного давления:

$$\Phi=\bar{E}2\frac{2\zeta+\zeta^2+z^2}{(2+\zeta)^2+z^2}. \tag{16}$$

Здесь введено обозначение $\zeta=\beta\omega/kT$. На низких частотах при $\omega<\beta/m$ сила радиационного давления, действующая на массивное колечко, с тре-

нием в поле бегущей волны во много раз превосходит соответствующую силу в отсутствие трения. Действительно, отношение $\Phi/\bar{E}$ для этого случая на низких частотах стремится к постоянной $2\zeta/(2+\zeta)$, тогда как в отсутствие трения это отношение, согласно формуле (10), стремится к нулю. Сильное влияние трения на силу радиационного давления в поле бегущей волны обусловлено двумя причинами. Во-первых, на низких частотах трение поворачивает фазу поперечной силы относительно ее положения в отсутствие трения так, что она стремится к фазе наклона струны в первичном поле. Во-вторых, трение приводит на низкой частоте к возрастанию модуля поперечной силы.

Для первичной стоячей волны, подставив соотношение (9) и (15) в формулу (4), получим следующее выражение для силы радиационного давления:

$$\Phi=\bar{E}\sin 2kx_0\frac{-4z}{(2+\zeta)^2+z^2}. \qquad (17)$$

Как видно из сравнения формул (11) и (17), трение приводит в этом случае к уменьшению силы радиационного давления. Это уменьшение получается как результат действия двух противоположных эффектов. Во-первых, трение поворачивает фазу поперечной силы так, что на низких частотах разность фаз между наклоном струны в первичном поле и поперечной силой стремится к $\pi/2$ либо к $-\pi/2$, что само по себе приводит к уменьшению силы радиационного давления. Во-вторых, трение увеличивает модуль поперечной силы, что само по себе приводит к увеличению силы радиационного давления. Это увеличение, однако, как следует из сравнения формул (11) и (17), оказывается недостаточным.

Итак, в настоящей работе на одномерном примере показано, что при формировании средних сил, действующих на рассеиватель, важны не только амплитуды первичного и рассеянного полей, но и разность фаз между ними. Именно фазовые соотношения определяют различие в величине силы радиационного давления для разного типа первичного поля; они же существенно влияют на величину силы радиационного давления при наличии диссипации. Оказывается, что и в трехмерном случае сильная зависимость силы радиационного давления от вида первичного поля и от диссипативных процессов определяется в основном разностью фаз между первичным и рассеянным полями.

Авторы с благодарностью вспоминают ныне покойного М. А. Исаковича, по предложению которого написана настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горьков Л. П.* О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости.— Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 1, с. 88—91.
2. *Westerwelt P. J.* The theory of steady forees caused by sound waves.— J. Acoust. Soc. Am., 1951, v. 23, № 4, p. 312—315.
3. *Rayleigh.* On the Pressure of Vibrations. Scientific Papers by Lord Rayleigh. V. 5. N. Y.: Dover, 1964.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
8.VI.1982