АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 3

УДК 534.833.

О ДИНАМИЧЕСКОМ КРАЕВОМ ЭФФЕКТЕ В ОДНОРОДНОМ ЖЕСТКОМ ВИБРОПОГЛОЩАЮЩЕМ ПОКРЫТИИ

Степанов В. Б., Тартаковский Б. Д.

Исследован динамический краевой эффект в ограниченном участке однородного жесткого вибропоглощающего покрытия, нанесенном на колеблющийся металлический стержень. Определена частотная характеристика величины краевого эффекта в диапазоне волновых соотношений вплоть до четвертьволновой толщины покрытия. Результаты расчета на основе развитой теории подтверждены экспериментально.

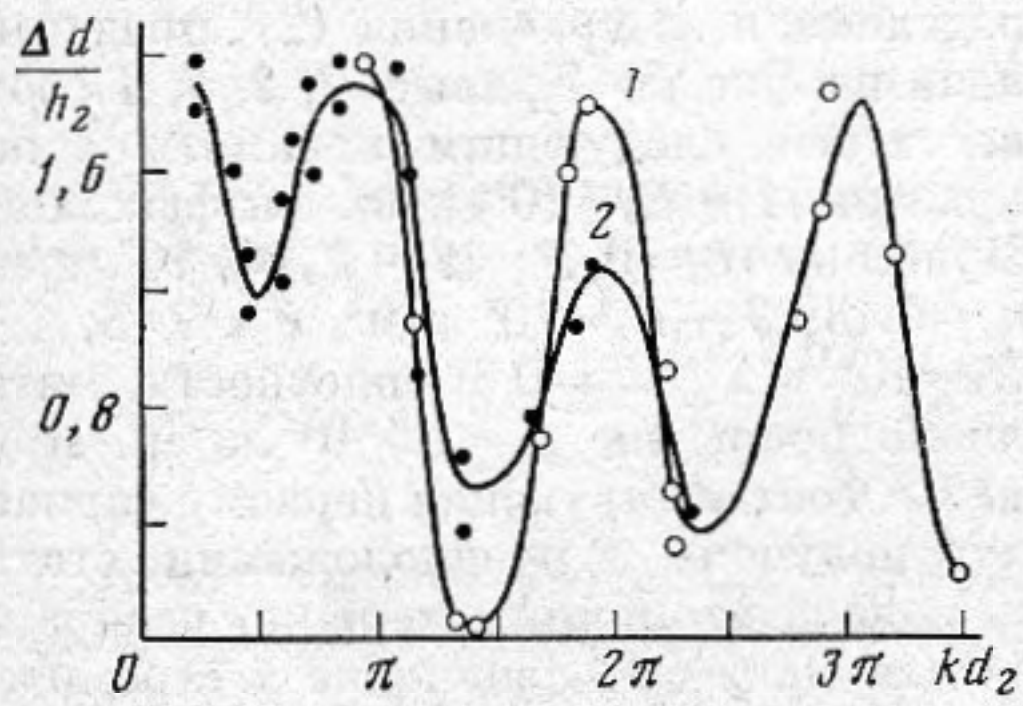
В работе [1] определена демпфирирующая способность ограниченного участка однослойного вибропоглощающего покрытия в случае равномерной квазистатической деформации основного металлического стержня, что характерно для низких частот. Поглощаемая энергия колебаний при этом существенно уменьшается из-за краевого эффекта, заключающегося в ослаблении деформации покрытия вблизи от свободных торцов участка по сравнению с ее величиной, определенной для такого же участка в сплошном слое покрытия «бесконечной» протяженности. Можно ожидать, что краевой эффект проявляется также и в области более высоких частот, где в стержне возбуждаются волны деформации, соизмеримые по длине с протяженностью участка покрытия. Вместе с тем величина динамического краевого эффекта, по-видимому, отличается от квазистатической вследствие неравномерной деформации стержня вдоль его длины и влияния сил инерции в слое покрытия. Поэтому представляет интерес определить зависимость краевого эффекта от частоты.

Эксперимент проводился на стальных стержнях размером 1,28×0,04 м² толщиной 0,04 и 0,06 м, с одной стороны которых наносилась вибропоглощающая пластмасса «Агат» слоем толщиной 0,008 и 0,016 м. Для выявления зависимости потенциальной энергии деформации покрытия от его волновых размеров первоначально сплошное покрытие общей длиной 1,28 м расчленялось на одинаковые участки протяженностью 0,08, 0,16 и 0,32 м. Величина потенциальной энергии определялась по ширине резонансных кривых входной проводимости и по смещению частот резонансов соответственных мод изгибных колебаний стержня после расчленения покрытия в диапазоне частот до 2500 Гц. Влияние краевого эффекта характеризовалось относительной величиной «укорочения» участка покрытия, эквивалентного уменьшению энергии его деформации, по сравнению с таким же участком в сплошном слое покрытия. Относительное эквивалентное укорочение рассчитывалось по формуле: $\Delta d/h_2=d_2(1-W_2/W_{20})/h_2$, где W_{20} и W_2 – определенная из эксперимента потенциальная энергия деформации сплошного покрытия и покрытия с разрезами, $2d_2$ и h_2 – протяженность участка покрытия и его толщина. Полученные таким образом параметры краевого эффекта являются усредненными по совокупности участков, составляющих покрытие стержня.

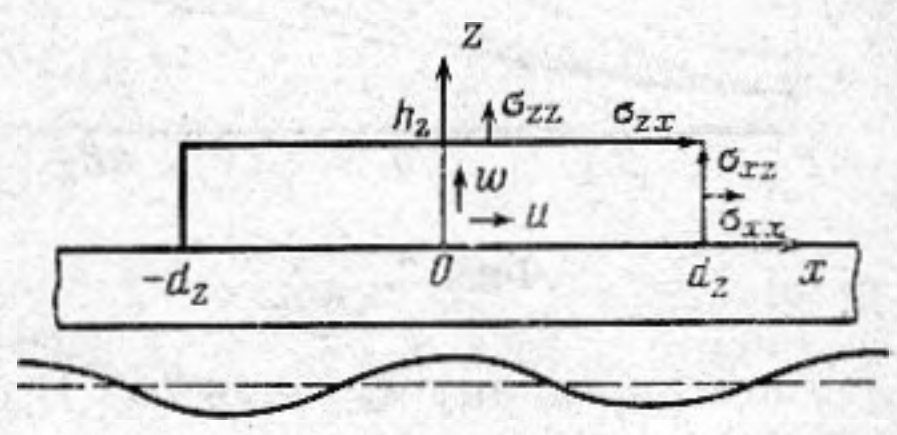
Зависимость величины $\Delta d/h_2$ от волновой протяженности участка покрытия kd_2 приведена на фиг. 1. Кривые *1* и *2* проведены по данным эксперимента и соответствуют $d_2/h_2=20$ и 5 (волновое число k рассчитывалось по измеренной длине изгибной волны). Краевой эффект существенно проявляется не только в режиме квазистатической деформации покрытия, но значителен и при соизмеримой протяженности участка покрытия с длиной изгибной волны в основном стержне. Например, при $d_2/h_2=5$ и $kd_2=2\pi$ (когда вдоль участка покрытия укладываются две длины волны) относительная величина эквивалентного укорочения составляет $\Delta d/h_2\simeq$

≃1.25. Это означает, что если пренебречь краевым эффектом, то расчет энергии вибрации, поглощаемой участком покрытия, приведет к погрешности $\delta=-(\Delta d/5h_2)\,100\%=-25\%$. Таким образом, результаты эксперимента свидетельствуют о необходимости учета влияния динамического краевого эффекта в расчетах ограниченного покрытия.

Расчет проведем на базе упрощенной модели. Рассмотрим участок вибропоглощающего покрытия протяженностью $2d_2$, толщиной h_2, шириной b_2, жестко приклеенный к металлическому колеблющемуся стержню толщиной h_1 (фиг. 2). Обычно импеданс покрытия мал по сравнению с импедансом стержня, вследствие чего пренебрежем влиянием покрытия на колебания стержня. Пусть в стержне задана стоячая продольная волна деформации $e_{xx}^0=\cos kxe^{-j\omega t}$, где $k=2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина вол-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

ны, ω — круговая частота. Определим потенциальную энергию деформации покрытия W_2, характеризующую поглощение энергии вибрации.

Исследуем диапазон волновых соотношений, ограниченный сверху четвертьволновой толщиной покрытия. Выполнение данного условия позволяет приближенно считать, что изменение частоты колебаний не приводит к заметному искажению структуры краевой зоны покрытия, влияя лишь на ее пространственный масштаб. Учитывая плавный характер перехода динамической деформации покрытия (по мере понижения частоты) в квазистатическую, можно описать движение ограниченного покрытия в виде колебаний слоя «бесконечной» протяженности, модулированных у торцов участка краевым квазистатическим распределением [1].

Продольная деформация и компоненты смещения покрытия для $x>0$ будут:

$$e_{xx}=\cos kx\left(1-\frac{e^{\gamma(x-d_2)/z}}{2}\right)e^{-j\omega t};$$

$$u=\int e_{xx}\,dx=\frac{1}{k}\sin kx-\frac{e^{\gamma(x-d_2)/z}}{2\left(\frac{\gamma^2}{z^2}+k^2\right)}\left(\frac{\gamma}{z}\cos kx+k\sin kx\right)e^{-j\omega t}; \tag{1}$$

$$w=-\frac{\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2}e_{xx}z=-\frac{\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2}\cos kx\left(1-\frac{e^{\gamma(x-d_2)/z}}{2}\right)ze^{-j\omega t},$$

где λ_2, μ_2 — параметры Ламе материала покрытия, γ — масштабный параметр, определяющий протяженность зоны краевого эффекта.

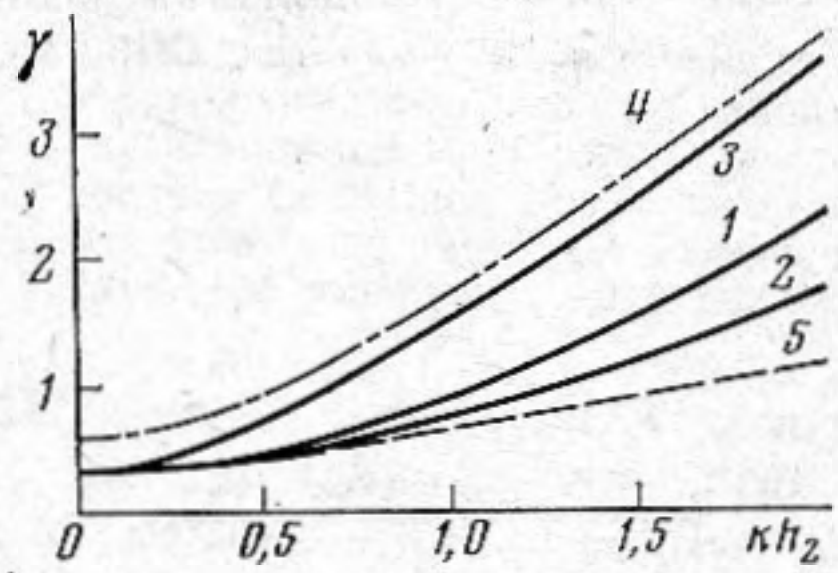
Величину γ найдем вариационным методом. Поскольку основной вклад в потенциальную энергию W_2 дают продольные деформации покрытия $e_{xx}=\partial u/\partial x$, для определения γ целесообразно использовать уравнение Лагранжа [2] относительно компоненты смещения u:

$$\int_0^{d_2}\int_0^{h_2}\left[(\lambda_2+2\mu_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\lambda_2+\mu_2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}+\mu_2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\rho_2\omega^2 u\right]\delta u\,dx\,dz-$$

$$-\int_0^{h_2}\left[(\lambda_2+2\mu_2)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial w}{\partial z}\right]\delta u|_{x=d_2}\,dz-\int_0^{d_2}\mu_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta u|_{z=h_2}\,dx=0, \quad (2)$$

где δu — вариация по γ смещения u в покрытии. Подстановка в формулу (2) смещений (1) с последующим интегрированием по x и z приводит к уравнению, связывающему γ с волновой протяженностью kd_2 и толщиной kh_2 участка покрытия.

Краевой эффект максимален, когда торец участка покрытия попадает в пучность деформаций стержня (при условии $\cos kd_2=\pm1$; $kd_2=n\pi$). В этом случае зависимость величины γ от волновой толщины покрытия kh_2, определенная из уравнения (2), представлена на фиг. 3. Кривые *1*, *2*, *3*, *4* соответствуют следующим параметрам покрытия: *1* — $E_2=10^9$ н/м², коэффициент Пуассона $\sigma_2=0{,}43$; *2* — $E_2=3\cdot10^9$ н/м², $\sigma_2=0{,}43$; *3* — $E_2=10^8$ н/м², $\sigma_2=0{,}43$; *4* — $E_2=10^9$ н/м², $\sigma_2=0{,}3$; плотность материала покрытия $\rho_2=1{,}5\cdot10^3$ кг/м³. Кривая *5*, соответствующая первому варианту, получена в предположении статической деформации стержня, распределенной по закону $e_{xx}^0=\cos kx$. В области малых kh_2 значение γ стремится к статической величине, определяемой по формуле $\gamma=1{,}05[(1-2\sigma_2)/2(1-\sigma_2)]^{1/2}$. Динамическая величина γ существенно выше ее статического значения и возрастает с увеличением kh_2, что свидетельствует о сокращении зоны краевого эффекта с ростом частоты. Это обусловлено знакопеременным характером распределения деформации вдоль стержня, вследствие чего зона краевого эффекта ограничивается ближайшим к торцу участка узлом деформации покрытия. Оказывают влияние также силы инерции (кривая *1* по сравнению с кривой *5*), из-за которых область пониженных деформаций покрытия, формирующаяся вблизи торцов участка, не успевает за период колебаний распространиться в глубь покрытия.



Фиг. 3.

Линейно аппроксимируя участки кривых фиг. 3, можно приближенно описать зависимость γ от волновой толщины покрытия. Так, в случае $E_2=10^9$ н/м², $\sigma_2=0{,}43$ (покрытие типа «Агат», кривая *1*), получаются соотношения

$$\gamma\simeq kh_2,\ 0{,}5\leqslant kh_2\leqslant1{,}5;\ \gamma\simeq1{,}75kh_2,\ kh_2>1{,}5. \quad (3)$$

Наибольшая протяженность зоны краевого эффекта (определяемая из условия $\exp[\gamma(\tau-d_2)/h_2]=0{,}1$) составляет $\tau=2{,}3h_2/\gamma$ или с учетом соотношений (3): $\tau\simeq0{,}36\lambda$, $0{,}5\leqslant kh_2\leqslant1{,}5$; $\tau\simeq0{,}2\lambda$, $kh_2>1{,}5$.

Потенциальная энергия деформации покрытия в зоне краевого эффекта приближенно описывается выражением

$$W_2=\frac{b_2E_2}{2}\int_{d_2-2{,}3h_2/\gamma}^{d_2}\int_0^{h_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx\,dz=\left[\frac{E_2k^2b_2}{2}h_2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin(4{,}6kh_2/\gamma)}{9{,}2kh_2/\gamma}\right)\right]\times$$

$$\times\left(\frac{2{,}3h_2}{\gamma}-\Delta d\right)\cos^2\omega t,$$

где u — продольное смещение покрытия, определяемое формулой (1), множитель в квадратных скобках представляет собой плотность потенциальной энергии «идеального» (не подверженного краевому эффекту) покрытия. Величина

$$\Delta d=\frac{\dfrac{h_2}{4\gamma}+\dfrac{\gamma}{16k^2h_2}\ln\left(1+\dfrac{4k^2h_2^2}{\gamma^2}\right)}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin(4{,}6kh_2/\gamma)}{9{,}2kh_2/\gamma}} \quad (4)$$

характеризует сокращение протяженности «идеального» покрытия, эквивалентное уменьшению потенциальной энергии его деформации из-за краевого эффекта. Подстановка соотношения (3) в выражение (4) приводит к следующим оценкам сокращения протяженности «идеального» покрытия: $\Delta d \simeq 0{,}143\lambda$, $0{,}5 \leqslant kh_2 \leqslant 1{,}5$; $\Delta d \simeq 0{,}063\lambda$, $kh_2 > 1{,}5$.

Найдем величину максимального краевого эффекта в случае изгибных колебаний основного стержня. Потенциальная энергия деформации покрытия, определенная с учетом соотношений (1), дается выражением

$$W_2 = \frac{b_2 E_2 k^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(4{,}6kh_2/\gamma)}{9{,}2kh_2/\gamma}\right) \times$$

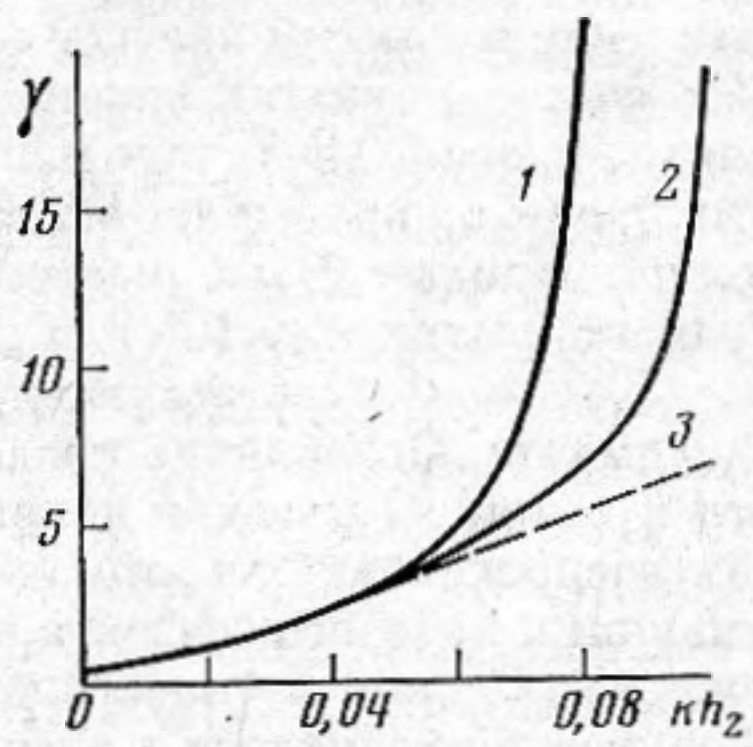
$$\times \left[h_1^3 \left(\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi}{4}\right)\left(\frac{2{,}3h_2}{\gamma} - \Delta d\right) \cos^2 \omega t,\right.$$

где $\xi = h_2/h_1$ — относительная толщина покрытия. Сокращение протяженности участка покрытия, эквивалентное краевому эффекту, составляет

$$\Delta d = \frac{\frac{h_2}{\gamma}\left(\frac{\xi^3}{8} + \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi}{16}\right) + \frac{1}{8}\frac{\gamma}{k^2 h_2}\left[\frac{\xi^3}{2} + \xi^2\left(1 - \frac{\gamma}{2kh_2}\operatorname{arctg}\frac{2kh_2}{\gamma}\right) + \frac{1}{8}\left(\xi - \frac{\xi^3\gamma^2}{k^2h_2^2}\right)\ln\left(1 + \frac{4k^2h_2^2}{\gamma^2}\right)\right.}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(4{,}6kh_2/\gamma)}{9{,}2kh_2/\gamma}\right)\left(\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi}{4}\right)}$$

Для распространенного на практике случая $\xi = 3$ получаются следующие оценки: $\Delta d \simeq 0{,}19\lambda$, $0{,}5 \leqslant kh_2 \leqslant 1{,}5$; $\Delta d \simeq 0{,}085\lambda$, $kh_2 > 1{,}5$. Это несколько больше, чем при деформации растяжения основного стержня.

Краевой эффект минимален, когда торец участка покрытия попадает в узел деформации стержня (при условии $\cos kd_2 = 0$, $kd_2 = \pi/2 + n\pi$). В этом случае зависимость величины γ от волновой толщины покрытия kh_2 при продольных колебаниях стержня, определенная из уравнения (2), представлена на фиг. 4. Кривые *1*, *2* рассчитаны для параметров покрытия: *1* — $E_2 = 10^9$ н/м², $\sigma_2 = 0{,}43$; *2* — $E_2 = 3 \cdot 10^9$ н/м², $\sigma_2 = 0{,}43$. Кривая *3*, соответствующая первому варианту, получена в предположении статической деформации стержня, распределенной по закону $e_{xx}^0 = \cos kx$. Динамическая величина γ даже для малых kh_2 существенно выше, чем в рассмотренном ранее случае максимального краевого эффекта (фиг. 3). Так, при $E_2 = 10^9$ н/м², $\sigma_2 = 0{,}43$ (кривая *1* фиг. 4) зависимость γ от kh_2 может быть приближенно описана соотношениями:



Фиг. 4.

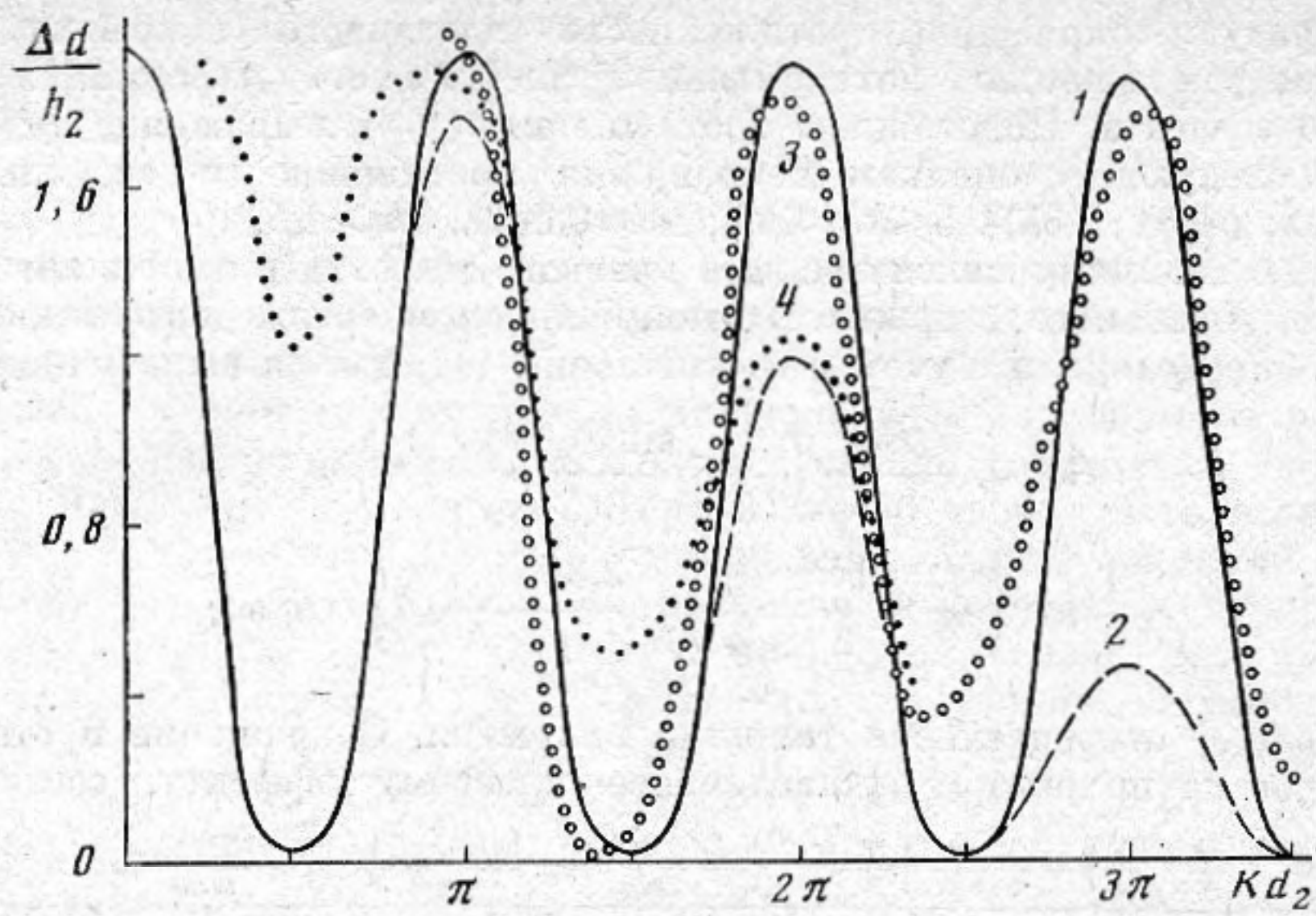
$$\gamma \simeq 21kh_2, \quad kh_2 < 0{,}02; \quad \gamma \simeq 60kh_2, \quad 0{,}02 \leqslant kh_2 \leqslant 0{,}05. \tag{5}$$

Этим оценкам соответствует весьма малая протяженность зоны краевого эффекта $\tau \simeq 0{,}0176 \div 0{,}0061\lambda$, а следовательно, и малая величина краевого эффекта. Потенциальная энергия деформации покрытия дается выражением

$$W_2 = \frac{b_2 E_2 k^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sin^2(2{,}3kh_2/\gamma)}{4{,}6kh_2/\gamma}\right)\left(\frac{2{,}3h_2}{\gamma} - \Delta d\right)\cos^2 \omega t.$$

Укорочение участка покрытия, эквивалентное краевому эффекту, составляет:

$$\Delta d = \frac{\frac{h_2}{4\gamma} - \frac{h_2}{4k}\left(1 - \frac{\gamma}{2kh_2}\operatorname{arctg}\frac{2kh_2}{\gamma}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{\sin^2(2{,}3kh_2/\gamma)}{4{,}6kh_2/\gamma}}$$



Фиг. 5.

или с учетом (5): $\Delta d \simeq 0{,}0013\lambda$, $0{,}02 \leqslant kh_2 \leqslant 0{,}05$; $\Delta d \to 0$, $kh_2 > 0{,}07 \div 0{,}1$. Следовательно, во всем рассмотренном диапазоне волновых толщин покрытия минимальный краевой эффект незначителен.

На фиг. 5 показана закономерность изменения относительного укорочения покрытия $\Delta d/h_2$ при непрерывном нарастании волновой протяженности участка покрытия kd_2 в случае изгибных колебаний основного стержня. Кривые *1* и *2* рассчитаны на основе уравнения (2) при параметрах покрытия $E_2=10^9$ н/м^2, $\sigma_2=0{,}43$, $\rho_2=1{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3 и отношениях $d_2/h_2=20$ и 5. Соответствующие им кривые *3* и *4* получены по данным эксперимента. Ослабление краевого эффекта с ростом волновой протяженности и толщины участка покрытия обусловлено знакопеременным характером распределения деформации вдоль стержня и влиянием сил инерции. Осцилляции краевого эффекта вызваны изменением величины деформации основного стержня в окрестностях торца участка покрытия. Расчет удовлетворительно совпадает с экспериментом, что свидетельствует о допустимости принятых в теории упрощений.

Таким образом, в расчете вибрационной энергии, поглощаемой ограниченным участком покрытия, следует учитывать краевой эффект, заключающийся в ослаблении деформации покрытия вблизи свободных торцов участка по сравнению с ее величиной, определенной для такого же участка в сплошном слое покрытия «бесконечной» протяженности. Краевой эффект проявляется в наибольшей степени при квазистатической деформации покрытия. По мере увеличения волновых размеров участка покрытия краевой эффект в среднем уменьшается, периодически нарастая при $kd_2=n\pi$ и ослабевая при $kd_2=\pi/2+n\pi$. Если $kh_2 \geqslant 1{,}5 \div 2$, краевой эффект можно не учитывать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанов В. Б., Тартаковский Б. Д.* Эффективность жесткого вибропоглощающего покрытия ограниченной протяженности.— Акуст. журн., 1977, т. 23, № 3, с. 430—436.
2. *Лейбензон Л. С.* Вариационные методы решения задач теории упругости. М.— Л.: Гостехиздат, 1943.

Акустический институт им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10.XI.1982