АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 4

УДК 534.231.3

ИМПЕДАНС ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ПО ОТНОШЕНИЮ К НОРМАЛЬНОЙ СИЛЕ, ПРИЛОЖЕННОЙ В ПОЛЮСЕ АНИЗОТРОПИИ

Удалов Г.В.

Решено уравнение классической теории изгибных колебаний полярно-ортотропной пластины, симметричных относительно полюса анизотропии. Исследован механический импеданс такой пластины по отношению к силе, действующей в полюсе анизотропии.

Уравнение свободных монохроматических изгибных колебаний полярно-ортотропной пластины, симметричных относительно полюса анизотропии, в соответствии с классической теорией изгиба анизотропных пластин [1] можно представить в виде

$$L(x)\,w(x)=0, \tag{1}$$

где $L(x)=\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}+\dfrac{2}{x}\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}-\dfrac{s^2}{x^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{s^2}{x^3}\dfrac{\partial}{\partial x}-1,\quad s^2=D_\vartheta/D_r,\ x=k_{из}r,\ k_{из}^4=$ $=\mu\omega^2/D_r$, r — расстояние от полюса анизотропии до точки наблюдения на пластине, w — амплитуда смещения изгибной волны, D_ϑ, D_r — жесткости изгиба пластины соответственно для окружного и радиального направлений, ω — круговая частота колебаний, μ — масса единицы площади пластины.

Решая уравнение (1) методом разложения $w(x)$ в ряд в окрестности правильной особой точки $x=0$ [2], получаем в качестве частных решений следующие четыре функции:

$$\begin{gathered}
U(s,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{4k}}{2^{2k}(2k)!\,\Gamma\left(k+\dfrac{3+s}{4}\right)\Gamma\left(k+\dfrac{3-s}{4}\right)};\\
G(s,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{4k+2}}{2^{2k+1}(2k+1)!\,\Gamma\left(k+\dfrac{5+s}{4}\right)\Gamma\left(k+\dfrac{5-s}{4}\right)};\\
V(\pm s,x)=\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^{1\pm s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{4k}}{2^{2k}k!\,\Gamma\left(k+\dfrac{2\pm s}{2}\right)\Gamma\left(2k+\dfrac{3\pm s}{2}\right)}
\end{gathered} \tag{2}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Последняя формула в (2) описывает два решения: $V(s,\,x)$ и $V(-s,\,x)$. Полученные функции являются линейно независимыми лишь при нецелых значениях параметра s. Если же образовать из найденных решений приведенные ниже линейные комбинации, то найдем частные решения однородного уравнения (1), являющиеся линейно независимыми при любых значениях s, а именно

$$J(s,\,x)=U(s,\,x)-G(s,\,x);\ I(s,\,x)=U(s,\,x)+G(s,\,x); \tag{3}$$

$$N(s,x)=\frac{[V(-s,x)+V(s,x)]-I(s,x)}{\cos(s\pi/2)}.$$

$$K(s,x)=\frac{\pi}{2\cos(s\pi/2)}\left[J(s,x)-\frac{V(-s,x)-V(s,x)}{\sin(s\pi/2)}\right].$$

Независимость решений (3) следует из выражения для определителя Вронского $W(x)$, вычисление которого дает $W(x)=8/\pi x^2$).

График функций (3) показан на фиг. 1.

Функции $J(s, x)$ и $I(s, x)$ могут быть представлены также следующими рядами:

$$J(s,x)=\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k(s)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},\quad I(s,x)=\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(s)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

где

$$a_k(s)=\left[2^k k!\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+\frac{1+s}{4}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+\frac{1-s}{4}\right)\right]^{-1}. \tag{4}$$

Значения $J(s, x)$ и $I(s, x)$ могут быть рассчитаны непосредственно по формулам (3) или (4) при любых s. Выражение (3) для $N(s, x)$ при нечетных значениях $s=2m+1$ ($m=0, 1, 2,...$) обращается в неопределенность вида 0/0, раскрывая которую находим

$$N(2m+1,x)=\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{k=0,1}^{m-1}\frac{(-1)^{\frac{3m+1-k}{2}}\left(\frac{m+1-k}{2}-1\right)!}{2^{\frac{k-m+1}{2}}k!\,(k+m)!!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}-\right.$$

$$-\left(\frac{x}{2}\right)^{-2m}\sum_{k=0}^{E\left(\frac{m-1}{2}\right)}\frac{(-1)^{k+m}(m-2k-1)!\,(2m-2k-1)!!}{2^k k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k}+$$

$$+\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}(-1)^{k+m}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{2^{k+m}(k+m)!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+m+1\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\times$$

$$\left.\times\left[2\ln\left(\frac{x}{2}\right)+2C-2\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}-\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{k+l}+\frac{1}{k+2l}\right)\right]\right\}, \tag{5}$$

где $C=0{,}577215665$ — постоянная Эйлера. Символ $\sum\limits_{k=0,1}^{m-1}$ означает, что переменная суммирования k принимает только четные значения от 0 до $m-1$, если $m-1$ четно, и нечетные значения от 1 до $m-1$, если $m-1$ нечетно; $E(x)$ — целая часть числа x.

Выражение (3) для функции $K(s, x)$ содержит неопределенность вида 0/0 как при нечетных, так и при четных значениях s. Раскрывая упомянутые неопределенности, получаем выражения

$$K(2m+1,x)=-\sum_{k=0,1}^{m-1}\frac{(-1)^{\frac{3m+k+1}{2}}\left(\frac{m+1-k}{2}-1\right)!}{2^{\frac{k-m+3}{2}}k!\,(k+m)!!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}+$$

$$+\left(\frac{x}{2}\right)^{-2m}\sum_{k=0}^{E\left(\frac{m-1}{2}\right)}\frac{(-1)^k(m-2k-1)!\,(2m-2k-1)!!}{2^{k+1}k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k}-$$

$$-\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{2^{k+m+1}(k+m)!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+m+1\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\times$$

$$\times\left[2\ln\left(\frac{x}{2}\right)+2C-2\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}-\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{k+l}+\frac{1}{k+2l}\right)\right]; \qquad (6)$$

$$K(2m,x)=\frac{\pi^{3/2}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+m}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{2^k k!\,\Gamma\left(\frac{k+m}{2}+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{k-m}{2}+\frac{3}{4}\right)}-$$

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{1-2m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{k+m}(m-k-1)!}{2^{2k+1-m}\Gamma\left(2k-m+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k}+$$

$$+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{1+2m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4k}}{2^{2k+1+m}k!\,(k+m)!\,\Gamma\left(2k+m+\frac{3}{2}\right)}\times$$

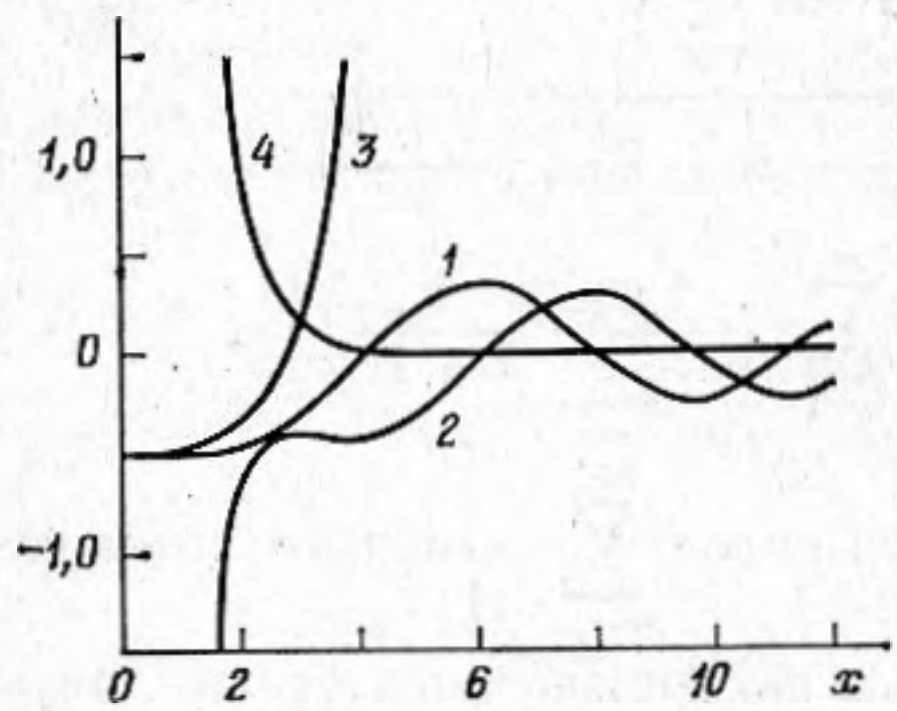
$$\times\left[4\left(\ln\frac{x}{\sqrt{2}}+C-1\right)-2\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}-\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{k+l}-4\sum_{l=1}^{2k+m}\frac{1}{2l+1}\right].$$

Итак, общее решение однородного уравнения (1) при любых значениях s можно записать в виде

$$w(x)=C_1J(s,x)+C_2N(s,x)+C_3I(s,x)+C_4K(s,x), \qquad (7)$$

где C_k $(k=1, 2, 3, 4)$ – постоянные.

При $s=0$ уравнение (1) переходит в уравнение свободных изгибных колебаний стержня с пропорционально изменяющимися по линейному закону вдоль его длины погонной массой и жесткостью на изгиб [3], а формулы (3) при $s=0$ определяют решения уравнения изгибных колебаний такого стержня. При $s=1$ уравнение (1) описывает симметричные относительно начала полярной системы координат свободные колебания изгиба изотропной пластины [4]. Решения (3) в этом случае переходят в соответствующие цилиндрические функции Бесселя нулевого порядка. При $s=3$ для $J(3, x)$, $I(3, x)$ из выражений (4) и для $N(3, x)$, $K(3, x)$ из соотношений (5) и (6) (при $m=1$) находим $J(3,x)=J_2(x)$, $I(3,x)=I_2(x)$, $N(3,x)=-N_2(x)$, $K(3, x)=K_2(x)$. Таким образом, для $s=3$ решениями уравнения (1) являются функции Бесселя второго порядка.



Фиг. 1. Вид функций, определенных соотношениями (3), при $s=4{,}75$, *1* – $J(s,x)$, *2* – $N(s,x)$, *3* – $I(s,x)$, *4* – $K(s,x)$

Из сравнения уравнения (1) с уравнением, решением которого являются функции Бесселя произвольного порядка [5], следует, что ни при каких других значениях s, кроме указанных $s=1$ и $s=3$, решения (3) не переходят непосредственно в функции Бесселя. Однако можно показать, что при нечетных значениях $s=2m+1$ они выражаются через цилиндрические функции Бесселя в соответствии со следующим соотношением:

$$Z(2m+1,x)=\sum_{k=0}^{m}(\pm1)^k\frac{(m+k)!}{2^k(m-k)!k!}\left(\frac{2}{x}\right)^k Z_k(x), \qquad (8)$$

где $Z(2m+1, x)$ обозначает какую-либо из функций, заданных формулами (3) при $s=2m+1$, а $Z_k(x)$ – соответствующую ей функцию Бесселя. Знак плюс в выражении (8) принимается при подстановке в него вместо $Z(2m+1, x)$ и $Z_k(x)$ соответственно функций $K(2m+1, x)$ и $K_k(x)$; в других случаях следует брать знак минус. Из формулы (8), в частности

следуют указанные выше соотношения между рассматриваемыми решениями (3) при $s=1$, $s=3$ и функциями Бесселя.

Решение (7) можно представить также в следующем виде:

$$w(x)=C_1H^{(1)}(s,\ x)+C_2H^{(2)}(s,\ x)+C_3I(s,\ x)+C_4K(s,\ x), \tag{9}$$

где введены обозначения:

$$H^{(1)}(s,\ x)=J(s,\ x)+iN(s,\ x),\ H^{(2)}(s,\ x)=J(s,\ x)-iN(s,\ x). \tag{10}$$

Отметим, что главные члены асимптотического представления функций (3) и (10) при $x\gg s$, $x\gg 1$ определяются формулами

$$J(s,x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ N(s,x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$I(s,x)=e^x/\sqrt{2\pi x},\ K(s,x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x},\ H^{(1)}(s,x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$H^{(2)}(s,x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь бесконечную полярно-ортотропную пластину, область которой в окрестности полюса анизотропии заменена жестким безынерционным диском радиуса a, причем центр диска совпадает с полюсом анизотропии пластины. Пусть к центру диска, жестко соединенного с пластиной, приложена нормальная сосредоточенная гармоническая во времени сила $F\exp(i\omega t)$. Найдем механический импеданс такой пластины по отношению к указанной силе.

Амплитуду смещения изгибной волны в пластине при $x\geqslant\nu=k_{\text{из}}a$ будем искать в форме (9). Учитывая, что при $x>a$ источники отсутствуют, а при $x\to\infty$ смещение $w(x)$ должно быть ограничено, коэффициенты C_1 и C_3 в общем решении (9) следует положить равными нулю. Оставшиеся неизвестными коэффициенты C_2 и C_4 определяются из граничных условий в месте соединения пластины с диском, которые заключаются при $x=\nu$ в равенстве нулю угла поворота пластины и в уравновешенности внешней силы F и перерезывающих сил, действующих на диск со стороны изгибно-колеблющейся пластины. Указанные условия можно записать в виде

$$\left.\frac{\partial w(x)}{\partial x}\right|_{x=\nu}=0,\quad 2\pi aN_r|_{x=\nu}=-F, \tag{12}$$

где N_r — приходящаяся на единицу длины окружности радиуса r перерезывающая сила, определяемая выражением [1]

$$N_r=-k_{\text{из}}^3D_r\left[\frac{\partial^3w(x)}{\partial x^3}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2w(x)}{\partial x^2}-\frac{s^2}{x^2}\frac{\partial w(x)}{\partial x}\right]. \tag{13}$$

Определив из уравнений (12) с учетом формул (13) и (9) коэффициенты C_3 и C_4 и обозначив штрихом дифференцирование по ν, для смещения пластины $w(x)$ при $x\geqslant\nu$ получаем выражение

$$w(x)=\frac{F}{2\pi\omega\sqrt{\mu D_r}\,\Delta_1(s,\nu)}\left[K'(s,\nu)H^{(2)}(s,x)-H^{(2)\prime}(s,\nu)K(s,x)\right], \tag{14}$$

где $\Delta_1(s,\ \nu)=K'(s,\ \nu)\left[\nu H^{(2)\prime\prime\prime}(s,\ \nu)+H^{(2)\prime\prime}(s,\ \nu)\right]-H^{(2)\prime}(s,\ \nu)\left[\nu K'''(s,\ \nu)+\right.$ $\left.+K''(s,\ \nu)\right]$.

Положив в формуле (14) $x=\nu$, для механического импеданса Z пластины в соответствии с соотношением $Z=F/i\omega w(s,\ \nu)$ находим

$$Z=8\sqrt{\mu D_r}\,\beta(s,\nu), \tag{15}$$

где

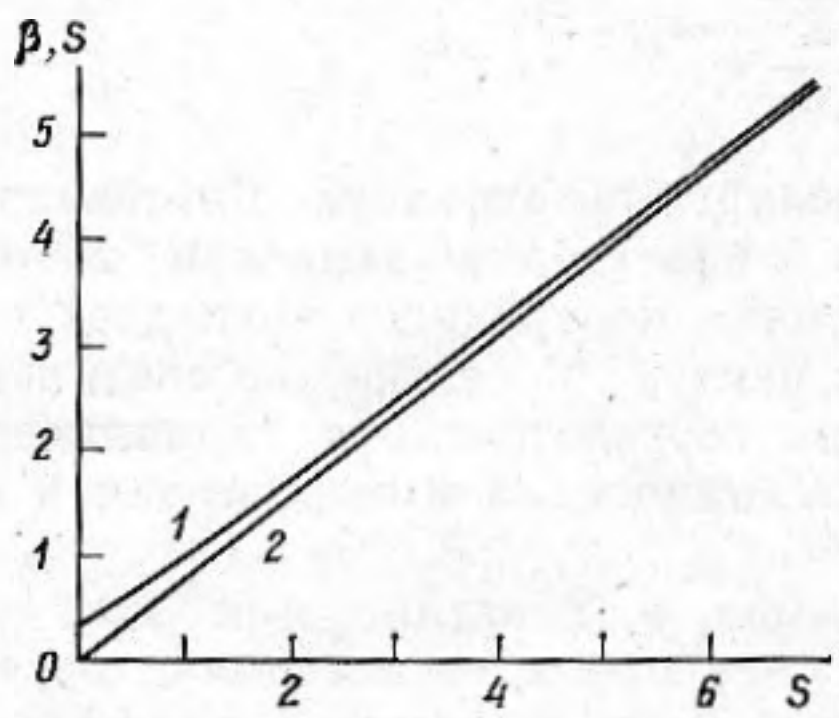
$$\beta(s,\nu)=\frac{\pi}{4i}\frac{\Delta_1(s,\nu)}{\Delta_2(s,\nu)}, \tag{16}$$

$$\Delta_2(s,\ \nu)=K'(s,\ \nu)H^{(2)}(s,\ \nu)-H^{(2)\prime}(s,\ \nu)K(s,\ \nu).$$

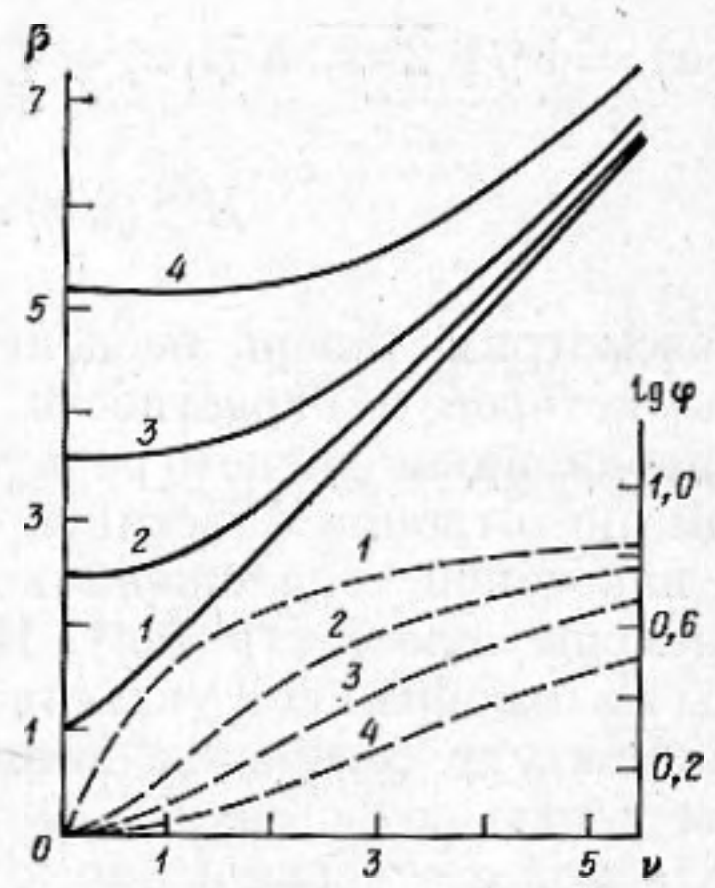
Отметим, что учет массы M диска приводит к добавлению в формуле (15) слагаемого, равного $i\omega M$.

Если в выражении (16) перейти к пределу при $\nu \to 0$, то получим значение $\beta(s, 0)$ (в дальнейшем обозначаем $\beta(s)$), соответствующее случаю возбуждения полярно-ортотропной пластины в полюсе анизотропии при отсутствии жесткого диска. Выполнив указанный предельный переход, находим

$$\beta(s) = \pi \frac{\Gamma^2\left(\frac{3+s}{4}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1+s}{4}\right)}. \tag{17}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимость величины $\beta(s)$ от параметра s анизотропии пластины и асимптота этой зависимости. *1* – величина $\beta(s)$, *2* – асимптота $\pi s/4$

Фиг. 3. Зависимость модуля (сплошные линии) и тангенса фазового угла (штриховые линии) величины $\beta(s, \nu)$ от частотного параметра ν. *1* – $s=1$; *2* – $s=3$; *3* – $s=4, 5$; *4* – $s=6, 5$

Полученый результат с учетом (15) свидетельствует о том, что механический импеданс полярно-ортотропной пластины по отношению к нормальной сосредоточенной силе, действующей в полюсе анизотропии, является активным и не зависит от частоты возмущающей силы при любом параметре s анизотропии пластины. При $s=1$ имеем $\beta(1)=1$. В этом случае формула (15) дает известное выражение для механического импеданса изотропной пластины [6].

При увеличении параметра s значение $\beta(s)$ асимптотически стремится к величине $\pi s/4$, а импеданс пластины при $s \gg 1$ определяется формулой $Z=2\pi\sqrt{\mu D_\vartheta}$. Зависимость $\beta(s)$ от параметра s графически представлена на фиг. 2. Там же показана асимптота этой зависимости.

В общем случае при $\nu \neq 0$ (пластина с диском) $\beta(s, \nu)$ и соответственно импеданс Z являются комплексными величинами. На фиг. 3 представлены зависимости модуля β и тангенса фазового угла φ величины $\beta(s, \nu) = \beta \exp(i\varphi)$ от частотного параметра ν (волнового размера радиуса диска) при различных фиксированных значениях s.

Если в выражении (15) положить $\nu \gg s$, $\nu \gg 1$, что соответствует диску больших волновых размеров, то, используя асимптотические формулы (11) для импеданса, приходим к соотношению $Z=2\pi\nu(\mu D_r)^{1/2}(1+i)$. Отнеся полученный результат к длине окружности диска, найдем удельный импеданс полубесконечной пластины по отношению к линейной силе, приложенной по нормали к пластине вдоль ее кромки со скользящей заделкой, отличающийся множителем $^1/_2$ от аналогичного импеданса бесконечной пластины [7].

В заключение отметим, что полученное решение классического уравнения не зависящих от угловой координаты изгибных колебаний полярно-ортотропной пластины может быть использовано для нахождения соответствующих решений по уточненным теориям анизотропных пластин [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров/Под ред. Арамановича И. Г. М.: Наука, 1973.
3. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1965.
4. *Рэлей.* Теория звука. Т. I/Под ред. Рытова С. М. М.: Гостеориздат, 1955.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963, с. 987.
6. Справочник по судовой акустике/Под ред. Клюкина И. И. и Боголепова И. И. Л.: Судостроение, 1978.
7. *Гутин Л. Я.* Избранные труды. Л.: Судостроение, 1977.
8. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
7.II.1983