УДК 534.231

ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ВОЗБУЖДАЕМОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ И СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ С ЖИДКОЙ СРЕДОЙ

Святенко В. А., Филимонов М. М.

В диапазоне низких звуковых частот многие инженерные конструкции (пластины, подкрепленные ребрами жесткости, гофрированные пластины, пластины из анизотропного материала) можно рассматривать как ортотропные, т. е. имеющие различную жесткость на изгиб в различных направлениях.

В работе [1] для входного сопротивления ортотропной пластины, возбуждаемой сосредоточенной силой, было получено выражение

$$Z=4\pi(m^2B_xB_y)^{1/4}/K[(1-B_{xy}/\sqrt{B_xB_y})^{1/2}],\tag{1}$$

где m – поверхностная масса пластины, B_x, B_y – изгибная жесткость в направлениях максимальной и минимальной жесткости пластины, B_{xy} – крутильная жесткость, K – полный эллиптический интеграл первого рода. Величина B_{xy} зависит от характера анизотропии пластины и принимает экстремальные значения 0 и $(B_xB_y)^{1/2}$ [2]. При $B_{xy}=(B_xB_y)^{1/2}$ (гипотеза Губера) выражение (1) переходит в

$$Z=8(m^2B_xB_y)^{1/4},\tag{2}$$

а в случае $B_{xy}=0$ величина входного сопротивления будет составлять 0,85 величины, даваемой выражением (2).

Входное сопротивление однородной пластины, соприкасающейся с жидкой средой и возбуждаемой сосредоточенной силой, было определено в работе [3], в которой для низких частот в предположении $\omega m<\rho c$ (ρc – волновое сопротивление среды) было получено выражение

$$Z=8(mB)^{1/2}(5/4)(\rho/mk_в)^{2/5}/(1+i\operatorname{tg}\pi/10)=$$
$$=10\rho^{2/5}B^{3/5}\omega^{-1/5}/(1+i\operatorname{tg}\pi/10),\tag{3}$$

где $k_в$ – волновое число изгибных колебаний, B – изгибная жесткость пластины, т. е. было показано, что входное сопротивление не зависит от инерционных характеристик пластины, а определяется плотностью среды и изгибной жесткостью пластины.

Представляет интерес рассмотреть влияние среды на величину входного сопротивления ортотропной пластины, обладающей различной жесткостью в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Методом интегральных преобразований для входной проводимости можно получить

$$Z^{-1}=\frac{i\omega}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_x\,dk_y}{B_xk_x^4+2B_{xy}k_x^2k_y^2+B_yk_y^4-\omega^2m-\omega^2\rho(k^2-k_0^2)^{-1/2}},$$

где k_0 – волновое число в среде, $k^2=k_x^2+k_y^2$.

В низкочастотном приближении при $\omega m<\rho c$ после замены переменных и однократного интегрирования будем иметь

$$Z^{-1}=\frac{\omega^{1/5}\alpha(1+i\operatorname{tg}\pi/10)}{5\pi\rho^{2/5}B_x^{3/5}}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{(\cos^2\theta+\alpha^2\sin^2\theta)^{1/5}\,d\theta}{(1-4\beta\sin^2\theta\cos^2\theta)^{3/5}},$$

где $\alpha=(B_x/B_y)^{1/4}$, $\beta=[1-B_{xy}(B_xB_y)^{-1/2}]/2$.

Разлагая знаменатель подынтегрального выражения в степенной ряд и интегрируя, для входной проводимости получим

$$Z^{-1}=\frac{\omega^{1/5}(1+i\operatorname{tg}\pi/10)}{10\rho^{2/5}(B_xB_y)^{3/10}}\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right)^{2/5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot8\ldots(5n-2)}{5^nn!}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\beta^n\varphi_n(\alpha),\tag{4}$$

где

$$\varphi_n(\alpha)=\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^{2/5}{}_1F_2\left(-\frac{1}{5};\,n+\frac{1}{2};\,2n+1;\,\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\right),$$

${}_1F_2$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Как показывают численные оценки, $\varphi_n(\alpha)$ практически не зависит от номера n и параметра α. Так, при $\alpha=1$ $\varphi_n(\alpha)=1$ для произвольного номера n, при увеличении α от 1 до ∞ $\varphi_0(\alpha)$ изменяется в пределах от 1 до 1,05, а при α, стремящемся к бесконечности ($\alpha^2-1/\alpha^2\to1$), и n, возрастающем от 0 до ∞, $\varphi_n(\alpha)$ изменяется от 1,05 до 1,15. Полагая $\varphi_n(\alpha)$ равным 1, что приводит к незначительному завышению суммы ряда, ряд в выражении (4) для $\beta\leqslant1/2$ с большой точностью можно представить функцией $(1-\beta)^{-3/10}$.

Окончательно входной импеданс ортотропной пластины, возбуждаемой сосредоточенной силой, примет вид

$$Z=\frac{10\rho^{2/5}(B_xB_y)^{3/10}}{\omega^{1/5}(1+i\,\mathrm{tg}\,\pi/10)}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^{2/5}(1-\beta)^{3/10}. \tag{5}$$

При изменении крутильной жесткости B_{xy} в пределах от $(B_xB_y)^{1/2}$ (гипотеза Губера) до нуля последний сомножитель в выражении (5), характеризующий ее влияние на величину входного импеданса, изменяется от 1 до 0,81, т. е. практически в тех же пределах, что и для ортотропной пластины в вакууме.

В предположении, что изгибная жесткость пластины в направлении y равняется жесткости B изотропной пластины той же толщины и выполняется условие $B_{xy}=(B_xB_y)^{1/2}$, выражение (5) можно представить как

$$Z=8(mB)^{1/2}\alpha(5/4)(\rho/mk_{\text{в}})^{2/5}\left(\frac{2\alpha^{1/2}}{1+\alpha}\right)^{2/5}\Big/(1+i\,\mathrm{tg}\,\pi/10). \tag{6}$$

Сопоставление выражений (2), (3), (6) показывает, что увеличение влияния реакции среды на величину входного сопротивления пластины характеризуется коэффициентом $[2\alpha^{1/2}/(1+\alpha)]^{2/5}$. При изменении $\alpha=(B_x/B_y)^{1/4}$ от 1 (изотропная пластина) до ∞ этот коэффициент изменяется от $\alpha^{1/5}$ до $1{,}32\alpha^{1/5}$.

Таким образом, ужесточение пластины в одном из направлений увеличивает входное сопротивление пластины практически в $(B_x/B)^{3/10}$ раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Heckl M.* Untersuchungen an Ortotropen Platten.– Acustica, 1960, v. 10, № 2, S. 109–115.
2. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: ГИФМЛ, 1963.
3. *Гутин Л. Я.* Избранные труды. Л.: Судостроение, 1977.

Поступила в редакцию
1.II.1983