АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 5

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.213

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ГЕОАКУСТИКИ

Бабич В. М., Крауклис П. В., Молотков Л. А.

Дается обзор проводимых в ЛОМИ АН СССР исследований по проблеме распространения упругих волн в слоистых, неоднородных средах с плоскими и криволинейными границами раздела. Многие задачи геоакустики по изучению геологического строения и физико-механических свойств среды связаны с излучением, распространением и приемом упругих колебаний, возбуждаемых как искусственными воздействиями, так и естественными причинами (землетрясением, ветром, трещинообразованием и т. п.). Здесь остановимся на решении линейных задач, описываемых в случае твердой среды уравнениями Ламе, а в случае жидких сред – уравнениями гидроакустики.

Для сравнительно простых сред могут быть построены точные решения уравнений, описывающие волновые поля. В общем же случае найти точные решения не удается. В связи с этим широкое применение имеют асимптотические решения, которые могут быть сколь угодно точными лишь в некоторой области (например, при высокой частоте или малой кривизне). Таким образом, в теории распространения волн наметились два подхода, использующие соответственно точные и асимптотические решения. Основоположниками первого подхода в Ленинградской школе являются академики В. И. Смирнов и С. Л. Соболев. Первые применения асимптотического подхода в теории распространения волн связаны с именем академика В. А. Фока.

Развитие первого направления привело к широко использующемуся в настоящее время матричному методу. Этот метод в случае плоских, цилиндрических или сферических однородных слоев и окружающих их сред позволяет зааписывать точные решения уравнений теории упругости и гидроакустики. При удовлетворении всех граничных условий матричный метод позволяет обойти вычисление определителей высоких порядков. В случае пачки из n слоев вся система характеризуется матрицей

$$\mathbf{D}=\mathbf{A}_{n+1}^{-1}\mathbf{C}_n\mathbf{C}_{n-1}\ldots\mathbf{C}_1\mathbf{A}_0, \tag{1}$$

при этом $\mathbf{C}_i$ – матрица слоя i, а $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_{n+1}^{-1}$ – матрицы сред, окружающих пачку слоев. Через элементы матрицы $\mathbf{D}$ довольно просто выражаются левые части дисперсионного уравнения системы, а также интерференционные коэффициенты отражения и преломления в случае упомянутой пачки слоев.

Впервые матричный метод был предложен В. Томсоном в 1950 г. [1]. Однако его подход, использующий матрицы четвертого порядка, оказался весьма ограниченным для расчета. Другой подход, идущий от работы Л. А. Молоткова [2], использует матрицы 5×5 и позволяет рассчитывать интерференционные коэффициенты отражения и преломления в гораздо более широкой области. Кроме того, второй подход дает возможность описывать упруго-жидкие системы, используя соотношения типа (1), в которое вводятся специальные матрицы 2×5 и 5×2, характеризующие упруго-жидкие границы [3]. Аналогичных матриц 2×4 и 4×2, соответствующих подходу В. Томсона, построить не удается. Матричный метод был распространен также на среды, неоднородные в направлении, перпендикулярном границам [4], на трансверсально-изотропные среды [5] и на среды со слабо искривленными границами [6].

С помощью матричного метода удалось решить задачу об эффективных средах периодических слоистых систем [7]. Эффективная среда в случае упругой периодической среды, каждый период которой разделен на m различных частей границами с проскальзыванием, является средой с m компонентами. В частности, для периодической упруго-жидкой системы эффективная среда оказывается двухкомпонентной средой, которая отличается от среды М. Био [7, 8]. С помощью матричного метода были также построены эффективные среды для периодических систем с произвольной анизотропией, с частными видами анизотропии, с вязкостью и с упругим последействием, а также для жидких и термоупругих периодических сред [9].

Исследование точных решений тесно переплетено с асимптотическими методами, которые основаны на использовании различных вариантов метода возмущений. Обратимся к работам 50-х годов [10–12], в которых был предложен широко применяе-

мый теперь лучевой метод расчета упругих волн. В его основе лежит идея искать решение уравнения динамики упругого тела в форме ряда

$$\exp[-i\omega t+i\omega\tau(M)]\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathbf{u}_j(M)}{(i\omega)^j}. \qquad (2)$$

Здесь M – точка, где ищется волновое поле, ω – частота, $\tau(M)$ и $\mathbf{u}_j(M)$ – подлежащие определению функции. С точностью до главных членов вблизи фиксированной точки M_0 выражение (2) равно

$$\exp\left[-i\omega t+i\omega\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\tau(M_0)}{\partial x_j}(x_j-x_j^0)\right]\times\mathbf{u}_0(M_0)\exp[i\omega\tau(M_0)],$$

$$M=M(x_1,x_2,x_3),\quad M_0=M_0(x_1^0,x_2^0,x_3^0). \qquad (3)$$

Выражение (3) – это плоская волна. Таким образом, разложение (2) можно рассматривать как плоскую волну, амплитуда и сдвиг фазы которой плавно меняются от точки к точке. В этом смысле лучевое разложение является разложением плоской волны. Близкие идеи лежат в основе задачи о распространении волн в плавно неоднородной слоистой среде. Пусть волна распространяется вдоль слоя или пачки таких же плавно неоднородных в горизонтальном направлении слоев и на протяжении длины волны свойства слоев мало меняются. Тогда волна локально будет иметь ту же структуру, как и волна, распространяющаяся в плоскопараллельной пачке слоев, в то время как сдвиг фазы и амплитудный множитель будут медленно меняться от точки к точке. Для амплитуды можно при этом найти в некотором смысле явное представление, связанное с явлением сохранения энергии в движущейся волне.

Другой аналог и обобщение лучевого раложения получится [13], если в ряде (2) фазу $-\omega t+\omega\tau$ заменить на $p\theta(t, M)$, u_j считать зависящим от времени и $(-i\omega)^j$ заменить на $(-ip)^j$ (p – большой параметр задачи). Такого рода разложения дают возможность описывать колебания, модулированные как по амплитуде, так и по частоте, что важно для сейсмических задач. Теория таких разложений называется пространственно временным лучевым методом.

Интересный аналог лучевого метода получается, если считать эйконал τ в разложении (2) комплексным с неотрицательной мнимой частью $\operatorname{Im}\tau\geqslant 0$, причем равенство имеет место только на фиксированном луче [14]. Такие решения известны под названием «гауссовы пучки», однако их строили обычно по-другому. Замечательное свойство гауссова пучка – не иметь сингулярностей. Суммируя такие решения, можно описать волновое поле при наличии сколь угодно сложной каустики [15]. Метод суммирования гауссовых пучков «не замечающий» сингулярностей волнового поля оказался удобным методом расчета волновых полей, возникающих в практических задачах [16]. Интересным обобщением лучевых разложений является метод пограничного слоя, позволяющий исследовать волновую картину в тех областях, где поле лучей теряет свою регулярность. К ним относятся окрестности границ раздела сред, вблизи которых возникают интерференционные поля упругих волн, удерживаемых вблизи границы ее кривизной или неоднородностью среды. Впервые такие волны были выделены из точного решения в работе [17]. Методом пограничного слоя удалось выделить из общего решения и исследовать новый класс поверхностных волн, названных смешанными поверхностными волнами [18]. Разложения в таких задачах имеют несколько более сложный вид, чем (2) и ведутся по степеням $\omega^{-1/3}$:

$$\exp[-i\omega t+i\omega\tau+\omega^{1/3}\varphi(\tau,\alpha)+\omega\nu\psi(\tau,\alpha)]\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathbf{u}_j(M)}{\omega^{1/3}}. \qquad (4)$$

Здесь α, τ – лучевые координаты, связанные с границей, вблизи которой ищется решение, ν – расстояние по нормали от нее, τ, φ, ψ, $\mathbf{u}_j$ – подлежащие определению функции. Процедура нахождения их в общем случае неоднородной среды с произвольными границами раздела описана, например, в [19].

Этим методом удалось решить ряд задач геоакустики, имеющих практическое значение для дальнейшего развития скважинных акустических методов и сейсмической разведки. К ним относятся, например, исследование динамики и кинематики головной волны, образующейся на вогнутой границе [20], описание винтовых волн в скважине и ряд других.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomson W. T.* Transmission of elastic waves through a strati-fied solid material.– J. Appl. Phys., 1950, v. 21, N 2, p. 89–93.
2. *Молотков Л. А.* О распространении упругих волн в средах, содержащих тонкие плоскопараллельные слои.– Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. 1961, вып. 5, с. 240–280.
3. *Молотков Л. А.* О дисперсионных уравнениях слоисто-неоднородных упругих и жидких систем.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1974, т. 42, с. 189–211.

4. *Молотков Л. А.* Об интерференционных волнах в свободном неоднородном упругом слое.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1973, т. 34, с. 117–141.
5. *Молотков Л. А., Баймагамбетов У.* Об исследовании распространения волн в слоистых трансверсально-изотропных средах.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1978, т. 78, с. 149–173.
6. *Молотков Л. А.* О характеристических матрицах слабо искривленных упругих слоев.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1980, т. 99, с. 74–84.
7. *Молотков Л. А.* Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1979, т. 89, с. 219–233.
8. *Biot M. A.* Theory of propogation of elastic waves in a fluidsaturated porous solid.– J. Acoust. Soc. Amer., 1956, v. 28, N 2, p. 168–191.
9. *Молотков Л. А., Хило А. Е.* Эффективные среды для периодических анизотропных систем.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1983, т. 128, с. 130–138.
10. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов.– Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 3, с. 355–357.
11. *Левин М. Л., Рытов С. М.* О переходе к геометрическому приближению в теории упругости.– Акуст. журн., 1956, т. 2, № 2, с. 173–176.
12. *Филиппов А. Ф.* О приближенном вычислении отраженных и преломленных волн.– Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1957, № 7, с. 841–854.
13. *Бабич В. М.* О пространственно-временном лучевом методе в теории упругих волн.– Изв. АН СССР, Физ. Земли, 1979, № 2, с. 3–13.
14. *Бабич В. М., Улин В. В.* Комплексные лучевые решения и собственные функции, сосредоточенные в окрестности замкнутой геодезической.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1981, т. 104, с. 6–14.
15. *Бабич В. М., Панкратова Т. Ф.* О разрывах функции Грина для волнового уравнения с переменным коэффициентом.– Проблемы математ. физики, 1973, т. 6, с. 9–27.
16. *Попов М. М.* Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1981, т. 104, с. 195–216.
17. *Бреховских Л. М.* О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы.– Акуст. журн., 1967, т. 13, № 4, с. 541–555.
18. *Бабич В. М., Молотков Л. А.* Применение асимптотических методов в теории поверхностных волн.– В кн.: Тр. V Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. Л.: Наука, 1971.
19. *Крауклис П. В., Цепелев Н. В.* О построении высокочастотной асимптотики волнового поля, сосредоточенного вблизи границы упругой среды.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1973, т. 34, с. 72–92.
20. *Крауклис П. В.* О кинематике и динамике головных волн, образованных на вогнутых границах.– Изв. АН СССР, Физ. Земли, 1974, № 9, с. 26–31.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Ленинградское отделение

Поступила в редакцию
25.I.1983

УДК 543.29

ОБ УСРЕДНЕННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МАЛЫХ ЧАСТИЦ В ЗВУКОВОМ ПОЛЕ, ВЫЗВАННОМ ИХ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

Миронов М. А.

Усредненное взаимодействие двух частиц в звуковом поле, вызванное периодическим изменением расстояния между ними, теоретически рассмотрено лишь для случая, когда глубина проникновения вязкой волны $\delta=(2\nu/\omega)^{1/2}$ значительно превосходит среднее расстояние между частицами l [1, 2]. Поскольку в практике акустической коагуляции аэрозолей расстояние между ближайшими частицами аэрозолей в среднем может превышать δ, необходимо обобщить теорию этого эффекта на случай $l>\delta$. В настоящей работе проведено такое обобщение. Ниже для краткости будем называть исследуемый эффект разностным взаимодействием.

Рассмотрим колебательное движение двух сферических частиц в вязкой среде со скоростями $\mathbf{v}_1e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{v}_2e^{-i\omega t}$. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать. Следуя работам [1, 2], примем, что гидродинамическая сила, действующая на первую частицу, равна стоксовой силе трения; $F_1=-6\pi\rho\nu R_1(\mathbf{v}_1-\mathbf{u}_2)$. Здесь R_1 – радиус первой частицы, ρ – плотность среды, ν – кинематическая вязкость, $\mathbf{u}_2$ – скорость среды, создаваемая второй частицей в месте нахождения первой частицы. Вследствие того что расстояние между частицами периодически изменяется ($\mathbf{v}_1\neq\mathbf{v}_2$), величина $\mathbf{u}_2$ помимо переменной компоненты содержит и постоянную компоненту. Соответственно, сила F_1 имеет постоянную компоненту, равную [1]:

$$\langle\mathbf{F}_1\rangle=6\pi\rho\nu R_1\left\langle\left(\frac{\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2}{-i\omega}\nabla\right)u_2\right\rangle. \qquad (1)$$