4. *Молотков Л. А.* Об интерференционных волнах в свободном неоднородном упругом слое.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1973, т. 34, с. 117–141.
5. *Молотков Л. А., Баймагамбетов У.* Об исследовании распространения волн в слоистых трансверсально-изотропных средах.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1978, т. 78, с. 149–173.
6. *Молотков Л. А.* О характеристических матрицах слабо искривленных упругих слоев.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1980, т. 99, с. 74–84.
7. *Молотков Л. А.* Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1979, т. 89, с. 219–233.
8. *Biot M. A.* Theory of propogation of elastic waves in a fluidsaturated porous solid.– J. Acoust. Soc. Amer., 1956, v. 28, N 2, p. 168–191.
9. *Молотков Л. А., Хило А. Е.* Эффективные среды для периодических анизотропных систем.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1983, т. 128, с. 130–138.
10. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов.– Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 3, с. 355–357.
11. *Левин М. Л., Рытов С. М.* О переходе к геометрическому приближению в теории упругости.– Акуст. журн., 1956, т. 2, № 2, с. 173–176.
12. *Филиппов А. Ф.* О приближенном вычислении отраженных и преломленных волн.– Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1957, № 7, с. 841–854.
13. *Бабич В. М.* О пространственно-временном лучевом методе в теории упругих волн.– Изв. АН СССР, Физ. Земли, 1979, № 2, с. 3–13.
14. *Бабич В. М., Улин В. В.* Комплексные лучевые решения и собственные функции, сосредоточенные в окрестности замкнутой геодезической.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1981, т. 104, с. 6–14.
15. *Бабич В. М., Панкратова Т. Ф.* О разрывах функции Грина для волнового уравнения с переменным коэффициентом.– Проблемы математ. физики, 1973, т. 6, с. 9–27.
16. *Попов М. М.* Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1981, т. 104, с. 195–216.
17. *Бреховских Л. М.* О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы.– Акуст. журн., 1967, т. 13, № 4, с. 541–555.
18. *Бабич В. М., Молотков Л. А.* Применение асимптотических методов в теории поверхностных волн.– В кн.: Тр. V Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. Л.: Наука, 1971.
19. *Крауклис П. В., Цепелев Н. В.* О построении высокочастотной асимптотики волнового поля, сосредоточенного вблизи границы упругой среды.– Зап. научн. семинара ЛОМИ, 1973, т. 34, с. 72–92.
20. *Крауклис П. В.* О кинематике и динамике головных волн, образованных на вогнутых границах.– Изв. АН СССР, Физ. Земли, 1974, № 9, с. 26–31.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Ленинградское отделение

Поступила в редакцию
25.I.1983

УДК 543.29

ОБ УСРЕДНЕННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МАЛЫХ ЧАСТИЦ В ЗВУКОВОМ ПОЛЕ, ВЫЗВАННОМ ИХ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

Миронов М. А.

Усредненное взаимодействие двух частиц в звуковом поле, вызванное периодическим изменением расстояния между ними, теоретически рассмотрено лишь для случая, когда глубина проникновения вязкой волны $\delta=(2\nu/\omega)^{1/2}$ значительно превосходит среднее расстояние между частицами l [1, 2]. Поскольку в практике акустической коагуляции аэрозолей расстояние между ближайшими частицами аэрозолей в среднем может превышать δ, необходимо обобщить теорию этого эффекта на случай $l>\delta$. В настоящей работе проведено такое обобщение. Ниже для краткости будем называть исследуемый эффект разностным взаимодействием.

Рассмотрим колебательное движение двух сферических частиц в вязкой среде со скоростями $\mathbf{v}_1e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{v}_2e^{-i\omega t}$. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать. Следуя работам [1, 2], примем, что гидродинамическая сила, действующая на первую частицу, равна стоксовой силе трения; $F_1=-6\pi\rho\nu R_1(\mathbf{v}_1-\mathbf{u}_2)$. Здесь R_1 – радиус первой частицы, ρ – плотность среды, ν – кинематическая вязкость, $\mathbf{u}_2$ – скорость среды, создаваемая второй частицей в месте нахождения первой частицы. Вследствие того что расстояние между частицами периодически изменяется ($\mathbf{v}_1\neq\mathbf{v}_2$), величина $\mathbf{u}_2$ помимо переменной компоненты содержит и постоянную компоненту. Соответственно, сила F_1 имеет постоянную компоненту, равную [1]:

$$\langle\mathbf{F}_1\rangle=6\pi\rho\nu R_1\left\langle\left(\frac{\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2}{-i\omega}\nabla\right)u_2\right\rangle. \qquad (1)$$

В этой формуле сомножители, стоящие под знаком усреднения, должны вычисляться в линейном приближении. Выражение для $\mathbf{u}_2$, справедливое при любых, в том числе и больших δ, расстояниях, имеет вид [3]

$$\mathbf{u}_2=\operatorname{rot}\operatorname{rot}(fv_2); \qquad \frac{df}{dr}=a\frac{e^{ikr}}{r^2}\left(r-\frac{1}{ik}\right)+\frac{b}{r^2};$$
$$a=-\frac{3R}{2ik}e^{-ikR_2}; \qquad b=-\frac{R_2^3}{2}\left(1-\frac{3}{ikR_2}-\frac{3}{k^2R_2^2}\right); \qquad k=\frac{1+i}{\delta}. \tag{2}$$

Подставляя соотношения (2) в формулу (1), можно найти выражение для средней скорости движения частицы $\mathbf{V}_1$ под действием силы $\langle\mathbf{F}_1\rangle$ в виде $\mathbf{V}_1=\langle\mathbf{F}_1\rangle/6\pi\rho\nu R_1$. Проводя аналогичные вычисления для второй частицы, можно получить выражение для средней скорости относительного движения двух взаимодействующих частиц $\mathbf{V}_\mathrm{P}=\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2$. В случае, когда линии осцилляции частиц параллельны, получаем

$$\mathbf{V}_\mathrm{P}=\left\langle\frac{v_1-v_2}{-i\omega}\left\{\mathbf{n}\left(\frac{3}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r}\left[v_2\left(\frac{1}{r}f_1'-f_1'''\right)-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-v_1\left(\frac{1}{r}f_2'-f_2''\right)\right]+\boldsymbol{\tau}\frac{1}{2}\sin 2\theta\left[v^2f_1'''-v_1f_2'''\right]\right\}\right\rangle. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ – единичные орты, соответствующие радиальному и тангенциальному движению частиц, θ – угол между направлением осцилляции и линией центров частиц. При возбуждении осцилляции частиц звуком в качестве v_1, v_2 в соотношение (3) следует подставлять колебательные скорости частиц относительно среды. Связь v_1, v_2 со скоростью среды u_0 имеет вид (в предположении, что плотность частиц ρ_0 много больше плотности среды, а радиус частиц много меньше δ):

$$v_{1,2}=\frac{i\omega\tau_{1,2}}{1-i\omega\tau_{1,2}}u_0, \qquad \tau_{1,2}=\frac{2}{9}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{R_{1,2}^2}{\nu}. \tag{4}$$

Выражения (3), (4) полностью описывают относительное движение двух частиц в звуковом поле под действием рассматриваемых сил. В двух предельных случаях: $l\ll\delta$ и $l\gg\delta$ эти выражения существенно упрощаются. При $l\ll\delta$, используя в формуле (3) квазистационарное стоксово приближение для поля и учитывая соотношения (4), получим после усреднения [1]

$$\mathbf{V}_\mathrm{P}=|u_0|^2\frac{3}{8}\frac{1}{l^2}\frac{\omega\tau_1\omega\tau_2(\tau_2-\tau_1)}{[1+(\omega\tau_1)^2][1+(\omega\tau_2)^2]}\left\{-\mathbf{n}\left[R_1\left(1-\left(\frac{R_1}{l}\right)^2\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-R_2\left(1-\left(\frac{R_2}{l}\right)^2\right)\right]\left(\frac{3}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\right)-\boldsymbol{\tau}\frac{1}{l^2}(R_1^3-R_2^3)\sin 2\theta\right\}. \tag{5}$$

Анализируя соотношение (5), можно показать, что частицы сближаются в области углов (0°, 54° 40′), (125° 20′, 180°) и расходятся в области углов (54° 40′, 125° 20′). Радиальная скорость значительно превосходит тангенциальную и зависит от расстояния между частицами как l^{-2}. При понижении частоты радиальная скорость уменьшается. При $l\gg\delta$ подставляем в качестве u_2 потенциальную часть полного поля скорости (вихревая экспоненциально затухает при удалении от частицы с показателем экспоненты $1/\delta$). Ей соответствует второе слагаемое в выражении для df/dr (2). После усреднения получим

$$\mathbf{V}_\mathrm{P}=|u_0|^2\frac{1}{2}\frac{1}{l^4}\frac{\rho_0}{\rho}R_1R_2\frac{(\tau_2-\tau_1)(R_2-R_1)}{[1+(\omega\tau_1)^2][1+(\omega\tau_2)^2]}\left[\mathbf{n}\left(\frac{3}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\right)+\boldsymbol{\tau}\sin 2\theta\right]. \tag{6}$$

Сравнение формул (6) и (5) указывает на существенные различия в характере движения частиц в областях $l\gg\delta$ и $l\ll\delta$. Из анализа соотношения (6) следует, что частицы сближаются в той области углов, где при $l\ll\delta$ происходит расхождение частиц, и отталкиваются в той области углов, где при $l\ll\delta$ происходит сближение частиц. При $l\gg\delta$ радиальная и тангенциальная компоненты скорости одинаковы по порядку величины и убывают с увеличением расстояния как l^{-4}. При понижении частоты $\mathbf{V}_\mathrm{P}$ не убывает.

В работе [4] рассмотрен другой эффект, также приводящий к относительному движению частиц – бьеркнессово взаимодействие (называемое также силами Кенига или силами Бернулли) в вязкой среде. Сравним бьеркнессово взаимодействие с эффектом, рассмотренным в настоящей работе. Поскольку бьеркнессово взаимодействие исследовано только для случая $l\gg\delta$, для сравнения используем формулу (6). В работе [4] рассматривался только случай одинаковых частиц. Обобщим результаты [4] на случай различных частиц. Опуская промежуточные вычисления, которые состоят в подстановке выражения (5) работы [4] в формулу (1) той же работы

и в нахождении относительной скорости движения под действием сил Бьеркнесса $\mathbf{V}_Б$ по формуле Стокса, приведем окончательное выражение для $\mathbf{V}_Б$:

$$\mathbf{V}_Б = |u_0|^2 \frac{1}{2} \frac{1}{l^4} \frac{\rho_0}{\rho} R_1 R_2 \frac{\sqrt{\tau_1\tau_2}(R_1+R_2)(1+\omega^2\tau_1\tau_2)}{[1+(\omega\tau_1)^2][1+(\omega\tau_2)^2]} \left[\mathbf{n}\left(\frac{3}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right) + \boldsymbol{\tau}\sin 2\theta \right]. \tag{7}$$

Сопоставление формул (7) и (6) показывает полную идентичность пространственной зависимости $\mathbf{V}_Б$ и $\mathbf{V}_Р$. В то же время величины скоростей движения под действием сил Бьеркнесса и разностного взаимодействия могут существенно различаться. Согласно (6, 7)

$$V_Р/V_Б = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} \frac{1}{1+\omega^2\tau_1\tau_2}; \qquad \alpha = R_2/R_1. \tag{8}$$

Анализ этого отношения показывает, что скорость движения под действием разностного взаимодействия может быть как больше, так и меньше скорости движения под действием сил Бьеркнесса. На частотах, меньших $(\tau_1\tau_2)^{-1/2}$, отношение $V_Р/V_Б$ зависит только от отношения радиусов частиц α. Если $\alpha < (3+\sqrt{5})/2 = 2{,}618$, то $V_Р < V_Б$, если $\alpha > 2{,}618$, то $V_Р > V_Б$. С увеличением частоты отношение $V_Р/V_Б$ уменьшается как ω^{-2}. Таким образом, если отношение радиусов частиц меньше 2,618, бьеркнессово взаимодействие превышает разностное при всех частотах. Если отношение радиусов частиц больше 2,618, на низких частотах разностное взаимодействие превосходит бьеркнессово, однако при достаточно больших частотах бьеркнессово взаимодействие опять становится доминирующим.

Приведем численную оценку скорости сближения двух частиц под действием разностного взаимодействия для следующих значений основных параметров: $R_1 = 4$ мкм; $R_2 = 1$ мкм; $\rho = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ г/см^3; $\rho_0 = 2{,}5$ г/см^3; $\nu = 0{,}15$ см^2/с; $l = 150$ мкм; $u_0 = 50$ см/с (см. [2] с. 572) и частоты 1 кГц. На частоте 1 кГц глубина проникновения вязкой волны равна 69 мкм. Поскольку расстояние между частицами более чем вдвое превышает δ, необходимо использовать формулу (6). Максимальная скорость сближения частиц реализуется при $\theta = \pi/2$ и $V_Р = 2{,}6 \cdot 10^{-2}$ см/с. Время смещения частиц на расстояние порядка l равно $T = l/V_Р \simeq 0{,}6$ с, что сравнимо со временем коагуляции, наблюдаемым в практике. Отметим, что, согласно соотношению (8), скорость сближения под действием сил Бьеркнесса для рассмотренного случая в 1,45 раза меньше, чем скорость сближения под действием разностных сил.

В заключение отметим, что сила разностного взаимодействия и сила бьеркнессова взаимодействия не исчерпывают всех гидродинамических эффектов, приводящих к относительному движению частиц в звуковом поле. Строгое рассмотрение этой задачи должно быть основано на последовательном решении уравнений гидродинамики вязкой, несжимаемой среды в квадратичном приближении. Это решение должно описать также эффекты, связанные с акустическими течениями, которые частично рассмотрены в работах [5, 6]. Полный расчет акустических течений, возникающих около двух колеблющихся тел, к настоящему времени не проведен, поэтому окончательная оценка роли отдельных эффектов в сближении частиц в звуковом поле выходит за рамки настоящей заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дианов Д. Б., Подольский А. А., Турубаров В. И.* Расчет гидродинамического сближения аэрозольных частиц в звуковом поле в стоксовом режиме обтекания.– Акуст. журн., 1967, т. 13, № 1, с. 46–50.
2. *Тимошенко В. И.* К расчету относительного движения аэрозольных частиц в акустическом поле.– Акуст. журн., 1970, т. 16, № 4, с. 570–574.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: ГТТИ, 1954.
4. *Миронов М. А.* Силы Бьеркнесса в вязкой среде и акустическая коагуляция аэрозолей.– Акуст. журн., 1976, т. 22, № 6, с. 941–942.
5. *Статников Ю. Г., Широкова Н. Л.* Роль микропотоков в процессе сближения частиц в звуковом поле.– Акуст. журн., 1968, т. 14, № 1, с. 143–146.
6. *Медников Е. П.* Теория акустических течений, возникающих около очень малых сферических препятствий.– Акуст. журн., 1968, т. 14, № 4, с. 582–589.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20.I.1983