АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXX 1984 Вып. 6

УДК 534.222

ВЗАИМНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ПРОДОЛЬНЫХ И СДВИГОВЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Зарембо Л. К., Кошкина Е. Н., Чунчузов И. П.

Показано, что продольная волна по мере распространения в изотропном твердом теле с медленно изменяющимися в пространстве внутренними деформациями передает энергию сдвиговой волне той же частоты, причем эффективность взаимодействия зависит от соотношения скоростей волн, а также от величины и масштаба неоднородностей.

Вопросы распространения упругих волн в твердых телах с внутренними деформациями имеют большое значение во многих прикладных областях, в частности, в сейсмоакустике. В данной работе с помощью ВКБ-метода исследована одномерная задача о распространении и взаимной трансформации акустических волн в деформированном твердом теле.

Предполагается, что деформированная изотропная среда может быть описана функцией **S**, характеризующей внутренние смещения в твердом теле, не зависящие от смещений **u** в упругой волне. Считая зависимость от поперечной координаты слабой, можно перейти к одномерной системе уравнений, описывающей взаимодействие продольных и сдвиговых волн, распространяющихся в направлении оси x_1 [1]:

$$\begin{cases} \rho_0\ddot{u}_1-\rho_0c_1^2u_{1,11}=\beta\dfrac{\partial}{\partial x_1}(S_{2,1}\cdot u_{2,1})+\tau\dfrac{\partial}{\partial x_1}(S_{1,1}\cdot u_{1,1})+\tau u_{1,11}\cdot u_{1,1} \\ \rho_0\ddot{u}_2-\rho_0c_2^2u_{2,11}=\beta\dfrac{\partial}{\partial x_1}(S_{2,1}\cdot u_{1,1})+\beta\dfrac{\partial}{\partial x_1}(S_{1,1}\cdot u_{2,1})+\beta\dfrac{\partial}{\partial x_1}(u_{1,1}\cdot u_{2,1}). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь ρ_0 — плотность недеформированного твердого тела, $c_1^2=(K+4\mu/3)/\rho_0$, $c_2^2=\mu/\rho_0$ — скорости продольной и сдвиговой волн, соответственно, $\beta=K+4\mu/3+A/2+B$; $\tau=3K+4\mu+2A+6B+2C$; K, μ — модули упругости второго, A, B, C — третьего порядков, точки обозначают вторую производную по времени, а запятая — дифференцирование по пространственной координате x_k. Зависимость от времени считается гармонической: $u_1=U(x_1)\exp(-i\omega t)$; $u_2=V(x_1)\exp(-i\omega t)$. Вводится малый параметр ε следующим образом:

$$V/S_0\sim U/S_0\sim\varepsilon^{1/2};\ u_{1,1}\sim k_1U;\ u_{2,1}\sim k_2V;\ S_{2,1}\sim pS_0, \tag{2}$$

где k_1, k_2 — волновые числа продольной и сдвиговой волн, $p=2\pi/\Lambda$, Λ — характерный период изменения внутренних деформаций, S_0 — порядок величины максимальных внутренних смещений. Для крупномасштабных внутренних деформаций, т. е. при выполнении условия $p/k_1\sim\varepsilon^{1/2}$ система уравнений (1) может быть преобразована к виду:

$$\begin{cases} U_{,11}+l_1(x_1)U-l_2(x_1)V=0 \\ U_{,11}+l_4(x_1)V-l_3(x_1)U=0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$l_1(x_1)=\frac{k_1^2(1+\beta_2S_{1,1})}{(1+\beta_2S_{1,1})(1+\tau_1S_{1,1})-\beta_0^2S_{2,1}^2};$$

$$l_4(x_1)=\frac{k_2^2(1+\tau_1S_{1,1})}{(1+\beta_2S_{1,1})(1+\tau_1S_{1,1})-\beta_0^2S_{2,1}^2}.$$

$$l_2(x_1)=\frac{\beta_1 k_2^2 S_{2,1}}{(1+\beta_2 S_{1,1})(1+\tau_1 S_{1,1})-\beta_0^2 S_{2,1}^2}=l_3(x_1)=$$

$$=\frac{\beta_2 k_1^2 S_{2,1}}{(1+\beta_2 S_{1,1})(1+\tau_1 S_{1,1})-\beta_0^2 S_{2,1}^2};$$

$\beta_1=\beta/\rho_0 c_1^2$; $\beta_2=\beta/\rho_0 c_2^2$; $\beta_0=\beta/\rho_0 c_1 c_2$; $\tau_1=\tau/\rho_0 c_1^2$ — безразмерные нелинейные параметры. С учетом оценок (2) можно показать, что коэффициенты $l(x_1)$ в (3) являются медленно меняющимися функциями, следовательно, система уравнений (3) может быть решена с помощью метода ВКБ [2]:

$$U=A[\mathscr{K}_1(x_1)]^{-1/2}\exp\left\{i\int^{x_1}\mathscr{K}_1\,dx_1\right\}+B[\mathscr{K}_2(x_1)]^{-1/2}\exp\left\{i\int^{x_1}\mathscr{K}_2\,dx_1\right\};$$

$$V=\varkappa_1 A[\mathscr{K}_1(x_1)]^{-1/2}\exp\left\{i\int^{x_1}\mathscr{K}_1\,dx_1\right\}-|\varkappa_2|B[\mathscr{K}_2(x_1)]^{-1/2}\exp\left\{i\int^{x_1}\mathscr{K}_2\,dx_1\right\}, \tag{4}$$

где

$$\varkappa_1(x_1)=\frac{(k_1^2m_1-k_2^2m_2)+R}{2\beta_2 k_1^2 S_{2,1}};\qquad \varkappa_2(x_1)=\frac{(k_1^2m_1-k_2^2m_2)-R}{2\beta_2 k_1^2 S_{2,1}};$$

$\mathscr{K}_{1,2}$ определяются из характеристического уравнения: $\mathscr{K}^4-2L_2(x_1)\mathscr{K}^2+L_1(x_1)=0$, где $L_1(x_1)=l_1(x_1)\cdot l_4(x_1)-l_3(x_1)\cdot l_2(x_1)$; $2L_2(x_1)=l_1(x_1)+l_4(x_1)$ т. е.

$$\mathscr{K}_1^2=\frac{(k_1^2m_1+k_2^2m_2)-R}{2[m_1(x_1)\cdot m_2(x_1)-b^2]};\qquad \mathscr{K}_2^2=\frac{(k_1^2m_1+k_2^2m_2)+R}{2[m_1(x_1)\cdot m_2(x_1)-b^2]}.$$

Здесь введены следующие обозначения $m_1=1+\beta_2 S_{1,1}$; $m_2=1+\tau_1 S_{1,1}$; $b=\beta_0\cdot S_{2,1}$; $R=[(k_1^2m_1-k_2^2m_2)^2+4k_1^2k_2^2b^2]^{1/2}$. Произвольные коэффициенты A и B в (4) определяются из граничных условий. Если считать, что на границе задана продольная волна с амплитудой Φ_0, т. е. $U|_{x_1=0}=\Phi_0$, $V|_{x_1=0}=0$, то амплитуды продольной и сдвиговой волн в неоднородном изотропном твердом теле будут:

$$|U|^2=\frac{\Phi_0^2}{[\varkappa_1(0)+|\varkappa_2(0)|]^2}\left\{\varkappa_2^2(0)\frac{\mathscr{K}_1(0)}{\mathscr{K}_1}+\varkappa_1^2(0)\frac{\mathscr{K}_2(0)}{\mathscr{K}_2}+2\varkappa_1(0)\times\right.$$

$$\left.\times|\varkappa_2(0)|\left[\frac{\mathscr{K}_1(0)}{\mathscr{K}_1}\frac{\mathscr{K}_2(0)}{\mathscr{K}_2}\right]^{1/2}\cos\left[\int^{x_1}(\mathscr{K}_2(x_1)-\mathscr{K}_1(x_1))\,dx_1\right]\right\};$$

$$|V|^2=\frac{\Phi_0^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2}{[\varkappa_1(0)+|\varkappa_2(0)|]^2}\left[\frac{\varkappa_2^2(0)}{\varkappa_2^2}\frac{\mathscr{K}_1(0)}{\mathscr{K}_1}+\frac{\varkappa_1^2(0)}{\varkappa_1^2}\frac{\mathscr{K}_2(0)}{\mathscr{K}_2}-\right. \tag{5}$$

$$\left.-2\frac{\varkappa_1(0)}{\varkappa_1}\frac{|\varkappa_2(0)|}{|\varkappa_2|}\left[\frac{\mathscr{K}_1(0)}{\mathscr{K}_1}\frac{\mathscr{K}_2(0)}{\mathscr{K}_2}\right]^{1/2}\cos\left[\int^{x_1}(\mathscr{K}_2(x_1)-\mathscr{K}_1(x_1))\,dx_1\right]\right\}.$$

Заметим, что данное решение справедливо при $S_{1,1}(x_1)$; $S_{2,1}(x_1)>\varepsilon^{1/2}$. Таким образом, в среде, внутренние деформации которой описываются функциями $S_{1,1}(x_1)$ и $S_{2,1}(x_1)$, удовлетворяющими (2), заданная на границе продольная волна по мере распространения вдоль x_1 будет передавать энергию сдвиговой волне, распространяющейся в том же направлении.

Из (5) следует, что в однородно-деформированной среде, т. е. при $S_{1,1}(x_1)=\text{const}$, $S_{2,1}(x_1)=\text{const}$ амплитуды продольной и сдвиговой волн можно записать в виде

$$|U|^2=\frac{\Phi_0^2}{(\varkappa_1+|\varkappa_2|)^2}\{\varkappa_1^2+\varkappa_2^2+2\varkappa_1|\varkappa_2|\cos(\mathscr{K}_2-\mathscr{K}_1)x_1\};$$

$$|V|^2=\frac{4\Phi_0^2\varkappa_1^2\varkappa_2^2}{(\varkappa_1+|\varkappa_2|)^2}\sin^2\frac{(\mathscr{K}_2-\mathscr{K}_1)x_1}{2}. \tag{6}$$

При этом на расстоянии $x_0=\pi/(\mathscr{K}_2-\mathscr{K}_1)$ от границы амплитуды достигают

своих экстремальных значений, равных:

$$|U|^2_{\min}=\frac{\Phi_0^2}{1+\dfrac{4k_1^2k_2^2b^2}{(k_1^2m_2-k_1^2m_1)^2}};$$
$$|V|^2_{\max}=\frac{\Phi_0^2}{1+\dfrac{(k_2^2m_2-k_1^2m_1)^2}{4k_1^2k_2^2b^2}}. \qquad (7)$$

Отсюда видно, что степень перекачки энергии из одной волны в другую зависит только от величины $\sigma=(2k_1k_2|b|)/(k_2^2m_2-k_1^2m_1)$, которую по аналогии с теорией колебаний связанных осцилляторов можно определить как коэффициент связанности упругих волн в неоднородной среде. Таким образом, эффективность обмена энергией между волнами зависит от величины деформаций $S_{1,1}$, $S_{2,1}$ и знака продольных деформаций. Решающее значение для взаимодействия упругих волн имеют сдвиговые внутренние деформации: если $S_{2,1}=0$ (т. е. $\sigma=0$), то при распространении продольной волны в неоднородной среде сдвиговая волна вообще не возникает.

Заданная на границе сдвиговая волна с амплитудой Ψ по мере распространения в неоднородной среде передает энергию продольной волне той же частоты: $|U|^2_{\max}=\Psi_0^2\sigma^2/(1+\sigma^2)$; $|V|^2_{\min}=\Psi_0^2/(1+\sigma^2)$.

Для анализа процесса перекачки энергии можно рассмотреть два предельных случая сильной ($\sigma\to\infty$) и слабой связанности ($\sigma\to 0$) системы упругих волн при малых деформациях. $\sigma\to\infty$, т. е. $k_2^2m_2-k_1^2m_1\to 0$, при этом:

$$|U|=\Phi_0\left|\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\sqrt{k_1k_2}\,x_1\right)\right|;$$

$$|V|=\Phi_0\left|\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\sqrt{k_1k_2}\,x_1\right)\right|, \qquad \varphi_0=(\sqrt{m_1m_2}-b)^{-1/2}-(\sqrt{m_1m_2}+b)^{-1/2}.$$

Расстояние $x_0^{(1)}$, на котором происходит полная перекачка энергии из продольной волны в сдвиговую, определяется как $x_0^{(1)}=\pi/\varphi_0$. Однако, на практике данный случай не реализуется, так как при $S_{1,1}\sim S_{2,1}\sim\varepsilon$ коэффициент связанности будет определяться соотношением скоростей продольной и сдвиговой волн: $\sigma\sim 2|b|c_1c_2/(c_1^2-c_2^2)$. Зависимость амплитуды продольной и сдвиговой волн от координаты при $\sigma=1$ изображена на фиг. 1. $\sigma\to 0$, т. е. $k_2^2m_2-k_1^2m_1\to\infty$. В этом случае амплитуды продольной и сдвиговой волн:

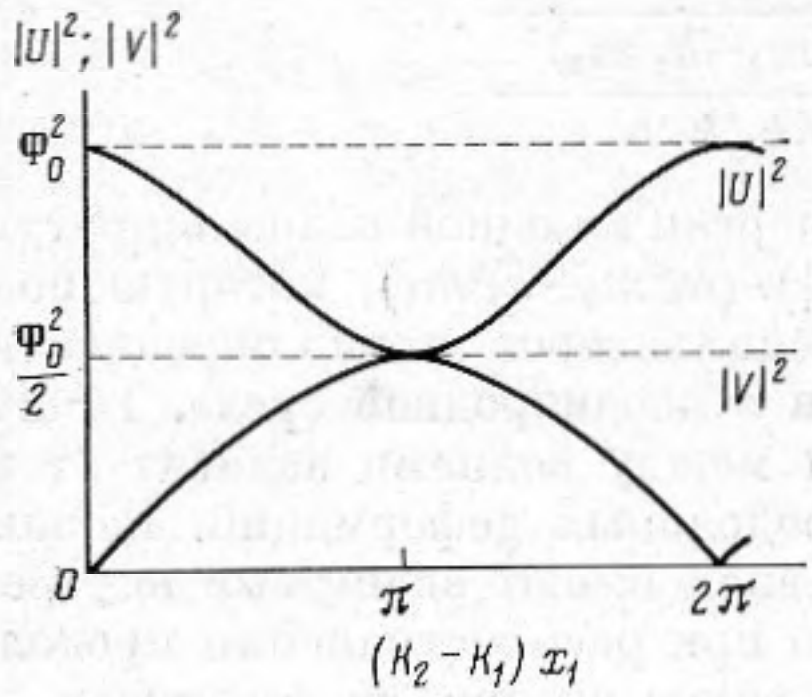
$$|U|=\Phi_0\left\{1-2\frac{\varkappa_1}{|\varkappa_2|}\sin^2\frac{1}{2}\left(\frac{k_2\sqrt{m_2}-k_1\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1m_2-b^2}}\right)x_1\right\};$$
$$|V|=\frac{2\Phi_0\varkappa_1|\varkappa_2|}{(\varkappa_1+|\varkappa_2|)}\left|\sin\frac{1}{2}\left(\frac{k_2\sqrt{m_2}-k_1\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1m_2-b^2}}\right)x_1\right|. \qquad (8)$$

Период пульсации амплитуд определяется как $x_0^{(2)}=\pi\sqrt{m_1m_2-b^2}/(k_2\sqrt{m_2}-k_1\sqrt{m_1})$. Зависимость амплитуд от x_1 приведена на фиг. 2. При малой связанности системы упругих волн обмен энергией между ними будет незначительным.

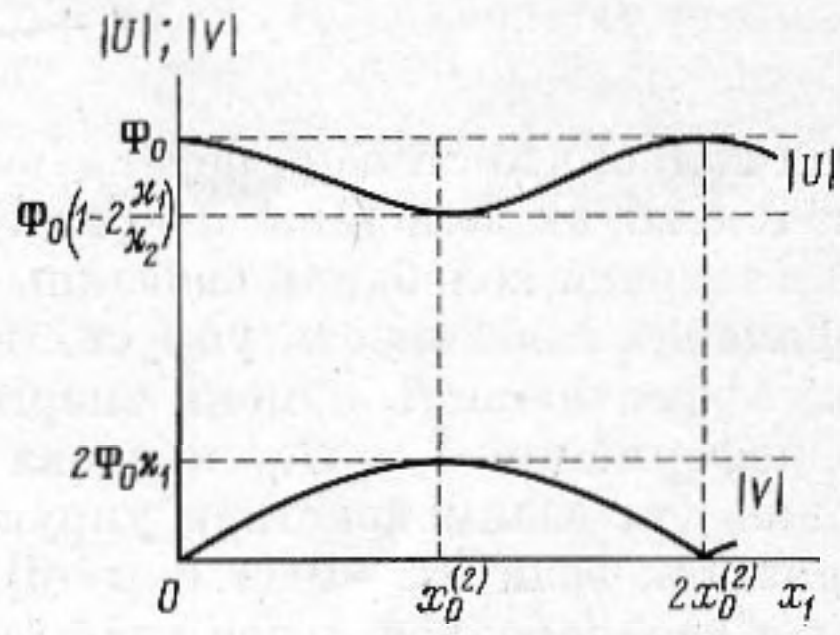
Из (3) можно получить с точностью до членов $\sim\varepsilon^{1/2}$ закон сохранения энергии в системе продольных и сдвиговых волн: $(1+\varkappa_1^2)|A|^2+(1+\varkappa_2^2)|B|^2=\text{const}$, который в случае постоянных деформаций принимает вид: $|U|^2+|V|^2=\Phi_0^2=\text{const}$. Задачу о взаимной трансформации волн можно считать линейной в том смысле, что в данном приближении взаимодействующие волны имеют одинаковую частоту. Если в неоднородной среде распространяется сигнал с полосой частот $\Delta\omega$, то полученные результаты

будут справедливы для каждой его спектральной компоненты, однако период пульсаций x_0 будет различным для отдельных спектральных компонент, и процесс перекачки энергии будет квазипериодическим.

Все эти выводы получены для постоянных деформаций $S_{1,1}$ и $S_{2,1}$. При $S_{1,1}=S_{1,1}(x_1)$ и $S_{2,1}=S_{2,1}(x_1)$ из (5) следует, что и в этом случае происходит перекачка энергии из одной волны в другую, однако, тот факт, что



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Энергообмен между продольной и сдвиговой волнами в неоднородной среде ($\sigma\simeq1$)

Фиг. 2. Зависимость амплитуды продольной и сдвиговой волн от координаты в случае слабой связанности системы упругих волн

период пульсаций x_0 и коэффициент связанности σ будут зависеть от координаты x_1, значительно усложняет анализ взаимодействия волн, не добавляя ничего принципиально нового. В заключение оценим реальные значения амплитуд взаимодействующих волн в неоднородной среде. Железо. $S_{1,1}\sim S_{2,1}\sim10^{-2}$; $c_1=5{,}6\cdot10^5$ см/с; $c_2=3{,}2\cdot10^5$ см/с; $\rho_0=7{,}7$ г/см^3; $\beta_2=-11$, $\tau=-17$, $\beta_0=-6$ (значения скоростей и модулей упругости 2-го и 3-го порядков заимствованы из [3]). Подставляя эти значения в (8), получим, что связанность составляет $\sigma\simeq0{,}1$, $|U|^2_{\min}\simeq0{,}99\Phi_0^2$; $|V|^2_{\max}\simeq0{,}01\Phi_0^2$, что соответствует случаю слабой связанности, изображенному на фиг. 2.

Таким образом, можно сделать вывод, что при распространении продольной волны в среде со сдвиговыми внутренними деформациями генерируется сдвиговая волна той же частоты, т. е. остаточные смещения играют роль поляризатора упругих волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зарембо Л. К., Прохоров В. М.* Генерация второй сдвиговой гармоники в средах с остаточными внутренними деформациями.– Акуст. журн., 1975, т. 21, № 2, с. 198–202.
2. *Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. Н.* Взаимодействие волн в неоднородных средах. Новосибирск: Наука, 1982.
3. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
5.IV.1983