АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 1

УДК 534.23

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ К ОШИБКАМ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ В БЛИЖНЕМ ПОЛЕ

Цукерников И. Е.

Из условий линеаризации уравнений гидродинамики получены критерии устойчивости численного решения интегрального уравнения первого рода в задачах линейной акустики. Полученные критерии используются для обоснования устойчивости предложенного в работе [1] метода расчета диаграммы направленности акустического излучателя.

В работе [1] предложен метод расчета диаграммы направленности акустического излучателя по результатам измерения звукового давления в зоне его ближнего поля. Метод основан на представлении давления вне измерительной поверхности в виде двучленного интеграла Грина, использующего функцию Грина свободного пространства (формула Гельмгольца), и определении на измерительной поверхности распределения нормальной составляющей колебательной скорости путем численного решения интегрального уравнения первого рода:

$$\oiint\limits_S \psi(y)\frac{e^{ikr}}{r}dS=-2\pi f(y_0)+\oiint\limits_S f(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left[\frac{e^{ikr}}{r}\right]dS,\quad y_0\in S, \tag{1}$$

где $f(y)$ и $\psi(y)$ — значения давления и его нормальной производной на измерительной поверхности S; $\partial/\partial n_y$ — производная по внешней к S нормали в точке y; $r=|y_0-y|$; k — волновое число $k=2\pi/\lambda$.

Интегральные уравнения первого рода относятся к классу некорректно поставленных задач, т. е. малым возмущениям входных данных соответствуют сколько угодно большие возмущения решения. Поэтому при разработке алгоритмов решения этих уравнений приходится либо сводить их к уравнениям второго рода, либо вводить дополнительные, вытекающие из физических соображений ограничения на точное решение уравнения, чтобы оно оказалось принадлежащим некоторому компактному множеству функций [2].

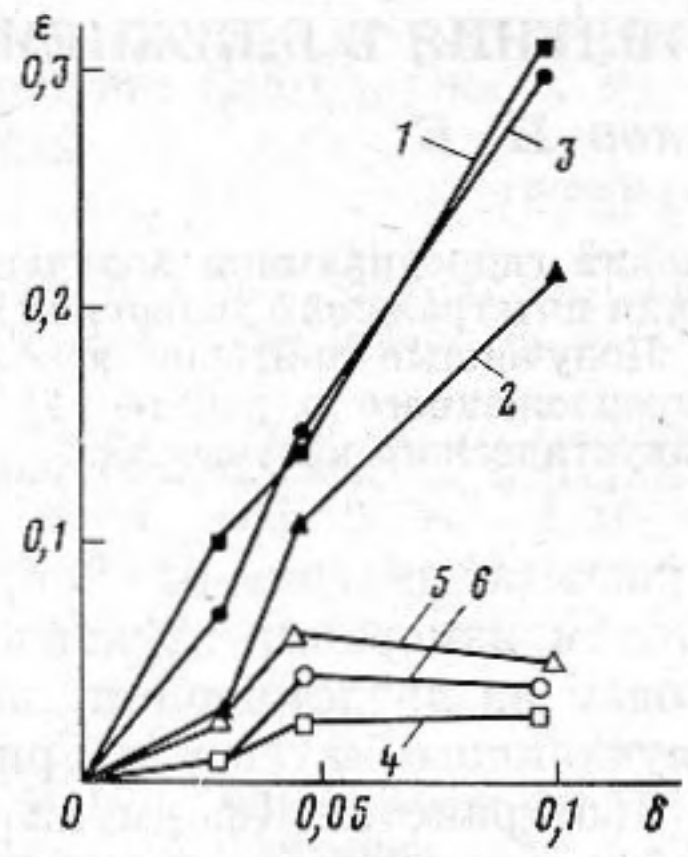
В настоящей работе получены два таких ограничения, удовлетворение которым обеспечивает равномерную сходимость приближенного решения уравнения (1) к его точному решению. Оба ограничения получены как следствие условий линеаризации уравнений гидродинамики и поэтому могут рассматриваться как критерии устойчивости решения уравнения первого рода в линейной акустике. На примерах решения тестовых задач показано, что при применении использованного в [1] алгоритма решения интегрального уравнения оба ограничения выполняются автоматически.

Записывая $\psi(y)$ в виде $ik\rho cv(y)$ (ρ — плотность среды, в которой создано звуковое поле, c — скорость звука в ней, $v(y)$ — нормальная составляющая скорости колебания частиц среды в точках измерительной поверхности), в силу критерия малости числа Маха [3] $M(y)=v(y)/c\ll 1$ получим

$$|\psi(y)|\leqslant k\rho c^2 M_0, \tag{2}$$

где M_0 — значение числа Маха, при котором еще возможно пренебречь нелинейными эффектами при распространении звуковой волны. Для оценки M_0 воспользуемся выражениями [4] $p+P_0=P_0\{1\pm(\gamma-1)M/2\}^{2\gamma/(\gamma-1)}$, $\rho=\rho_0\{1\pm(\gamma-1)M/2\}^{2/(\gamma-1)}$, в которых P_0 и ρ_0 — давление и плотность в невозмущенной звуковым полем среде, γ — показатель адиабаты в уравнении

состояния для рассматриваемой среды. Разлагая биномы в степенные ряды, ограничиваясь линейным приближением и оценивая модули остаточных сумм, получим, что вклад нелинейных членов по абсолютной величине не превышает значений, даваемых выражениями $\gamma(\gamma+1)(M/2)^2/(1-\gamma M/2)$ и $\gamma(M/2)^2/(1-\gamma M/2)$. Выбирая в качестве M_0 значение $0{,}01/\gamma$, наряду с выполнением неравенств $|p/P_0|\ll 1$, $|(\rho-\rho_0)/\rho_0|\ll 1$ будем иметь вклад нелинейных членов в значения p и ρ в звуковой волне менее 1% величины, даваемой линейным приближением. Так, для воздуха ($\gamma=1{,}4$) $M_0=7\cdot 10^{-3}$, для воды ($\gamma=7$) $M_0=1{,}4\cdot 10^{-3}$.



Фиг. 1. Зависимость значений максимальной ошибки ε в решении интегрального уравнения (*1–3*) и результатах расчета диаграммы направленности (*4–6*) от величины максимальной ошибки δ, введенной в распределение давления на поверхности измерительного цилиндра. *1, 4* – $ka=3{,}4$; *2, 5* – $ka=5{,}6$; *3, 6* – $ka=6$

Являясь предельными значениями нормальных производных решения уравнения Гельмгольца, функции $\psi(y)$ дифференцируемы на S и удовлетворяют условию Гельдера [5]

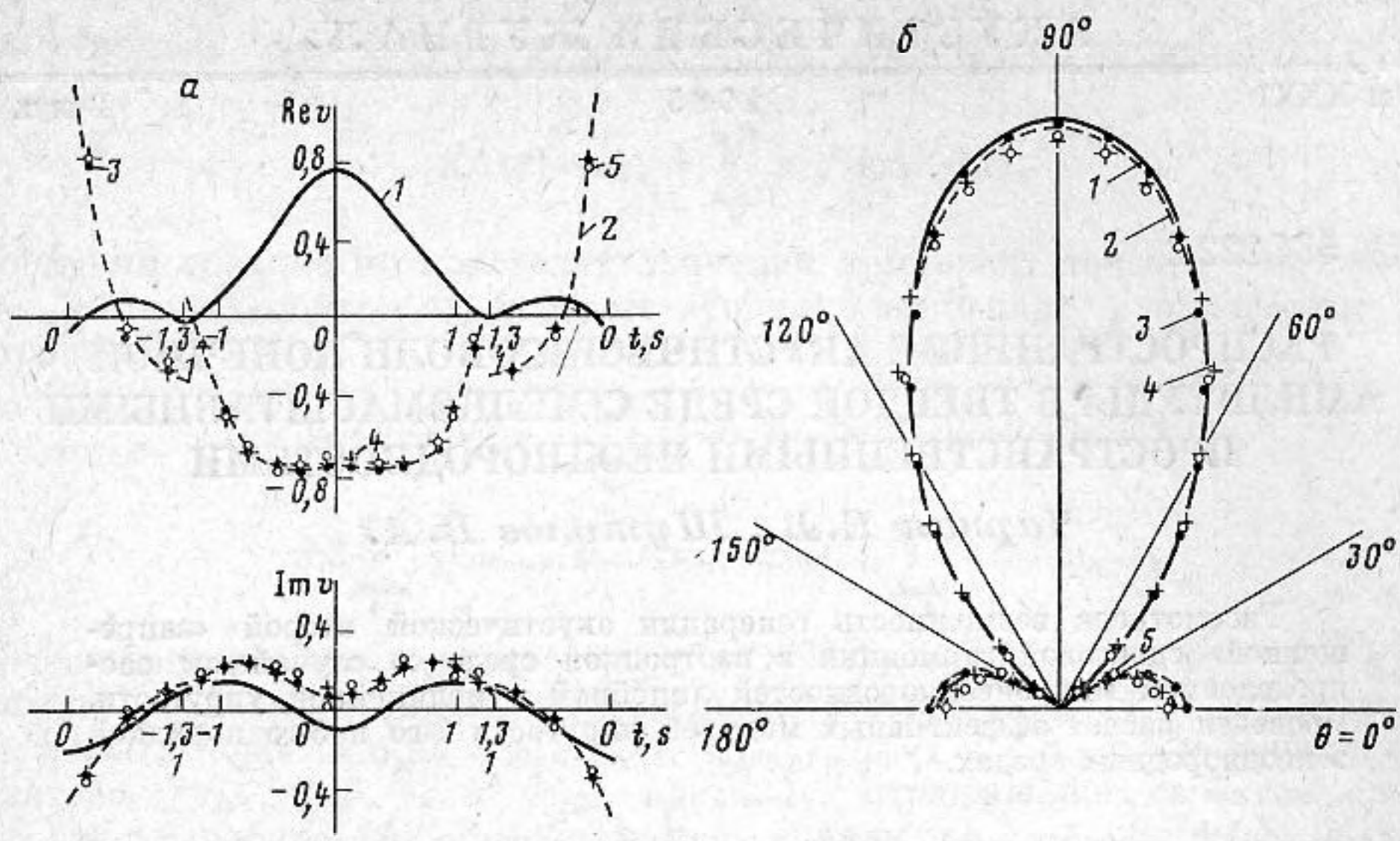
$$|\psi(y_2)-\psi(y_1)|\leqslant A|y_2-y_1|^{\alpha}, \tag{3}$$

где A и α – положительные постоянные и $0<\alpha\leqslant 1$. При этом можно подобрать такие A и α, что неравенство (3) будет справедливо для любой непрерывной ограниченной функции $\psi(y)$ и любых двух точек y_1 и y_2 поверхности S. Применяя теорему о конечном приращении, заменяя производную по касательной производной по времени, деленной на скорость звука (в рамках линейной акустики это величины одного порядка [3]), а также используя гармоническую зависимость от времени и условие $v(y)\leqslant M_0c$, получим неравенство $|\psi(y_2)-\psi(y_1)|\leqslant\rho(kc)^2M_0|y_2-y_1|$, совпадающее с неравенством (3) при $A=\rho(kc)^2M_0$ и $\alpha=1$.

Неравенства (2) и (3) позволяют выделить в пространстве непрерывных на S функций компактное множество $\{\psi\}$ равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций, содержащее точное решение уравнения (1). На этом множестве любой алгоритм поиска решения интегрального уравнения будет устойчив в смысле сходимости в равномерной метрике [2, 6]. В случае неоднозначной разрешимости уравнения (1) (что имеет место для собственных значений волнового числа, при которых внутри S существуют стоячие волны с нулевым значением давления на S [7]) решения этого уравнения образуют некоторое множество компакта $\{\psi\}$, что, согласно работе [6], обусловливает устойчивость решения уравнения (1) в смысле непрерывности многозначных отображений.

Таким образом, выполнение неравенств (2), (3) при численном решении уравнения (1) обеспечивает равномерную сходимость приближенного решения этого уравнения к его точному (в общем случае неединственному) решению и с учетом результатов работы [8] – устойчивость предложенного в [1] метода расчета диаграммы направленности по отношению к малым изменениям исходных данных.

Для иллюстрации полученных результатов и проверки устойчивости используемых в [1] алгоритмов расчета с их помощью была рассчитана диаграмма направленности антенны из пяти точечных синфазных источников звука, расположенных с периодом $\lambda/4$ на оси вращения окружающего антенну измерительного цилиндра радиуса a, длиной $2{,}6\,a$. В точные



Фиг. 2. Кривые распределения нормальной составляющей колебательной скорости на поверхности цилиндра (*а*) и диаграммы направленности антенны (*б*) для $ka=5{,}6$. *1* – аналитическое решение; *2, 5* – результаты расчета посредством решения интегрального уравнения при точном задании давления (2) и при введении случайной ошибки с $\delta_{max}=3{,}5$, 10%

значения давления, соответствующие аналитическому распределению звукового поля антенны на поверхности цилиндра, были внесены равномерно распределенные случайные ошибки δ с $\delta_{max}=3$, 5 и 10%. Расчеты выполняли для трех значений волнового радиуса $ka=3{,}4$; 5,6 и 6, из которых $ka=5{,}6$ является одним из указанных выше собственных значений, для которых уравнение (1) разрешимо неоднозначно. Так как в [1] для решения интегрального уравнения применяется метод сведения его к системе линейных алгебраических уравнений, в котором неравенства (2), (3) не используются, одной из целей расчетов была проверка их выполнения при осуществлении этого метода.

На фиг. 1 приведены максимальные значения относительных ошибок ε. За точные приняты значения, соответствующие результатам расчета, полученным при использовании невозмущенных значений давления на поверхности цилиндра. На фиг. 2 представлены результаты расчета для собственного значения волнового радиуса. Во всех расчетах неравенства (2), (3) оказались выполненными автоматически.

Автор приносит благодарность инженеру С. М. Пуховой за помощь в проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Римский-Корсаков А. В., Цукерников И. Е.* О расчете диаграммы направленности по результатам измерения звукового давления в ближнем поле излучателя.– Акуст. журн., 1977, т. 23, № 6, с. 919–928.
2. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, с. 285.
3. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973, с. 495.
4. *Остроумов Г. А.* Основы нелинейной акустики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967, с. 132.
5. *Мусхешвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их применения к математической физике. М.: Наука, 1968, с. 511.
6. *Иванов В. К.* О некорректно поставленных задачах.– Матем. сб., 1963, т. 61, № 2, с. 211–223.
7. *Цукерников И. Е.* О численном решении внешней задачи Дирихле с помощью интегрального уравнения первого рода. ЖВМ и МФ, 1976, т. 16, № 5, с. 1359–1364.
8. *Федорюк М. В.* О работах Г. Д. Малюжинца по теории волновых потенциалов. М.: Тр. АКИН, 1971, вып. 15, с. 169–179.

Всесоюзный научно-исследовательский
и экспериментально-конструкторский
институт продовольственного
машиностроения

Поступила в редакцию
16.VI.1983