АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 1

УДК 534.29

СРЕДНЯЯ СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА МАЛУЮ СФЕРУ В ПОЛЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Данилов С. Д.

Вычислена средняя сила, действующая на малую по сравнению с длиной звуковой волны сферическую частицу в поле бегущей плоской волны в вязкой жидкости с учетом акустических течений, развивающихся около частицы.

В [1, 2] рассматривалась сила радиационного давления, действующая на малое по сравнению с длиной звуковой волны препятствие в вязкой жидкости. Оказалось, что вязкость приводит к значительному увеличению силы радиационного давления по сравнению со случаем идеальной жидкости. Расчет силы радиационного давления в [1, 2] проводился с помощью интегрирования среднего потока импульса через достаточно удаленную замкнутую поверхность, содержащую препятствие. При этом вклад акустических течений, развивающихся около препятствия, не учитывался, в связи с чем вычисленная сила радиационного давления, вообще говоря, не совпадает со средней силой, действующей непосредственно на препятствие.

В настоящей работе впервые проведен расчет средней силы, действующей на малое препятствие, помещенное в плоскую бегущую волну, с учетом возникающих около него акустических течений. Оказалось, что акустические течения влияют на среднюю силу, и сила радиационного давления, вычисленная в [1, 2], действительно не совпадает со средней силой, действующей на препятствие. В связи с этим в случае вязкой жидкости необходимо различать понятия силы радиационного давления и средней силы, действующей на препятствие. Сила радиационного давления представляет собой акустическую часть среднего потока импульса, входящего внутрь поверхности, охватывающей частицу [1, 2]. Средняя сила, действующая на препятствие, является алгебраической суммой силы радиационного давления и потока импульса, уносимого акустическими течениями через достаточно удаленную поверхность. В идеальной — невязкой и нетеплопроводной — среде акустические течения отсутствуют и сила радиационного давления совпадает со средней силой, действующей на препятствие.

Ниже вычисление средней силы проводится в квадратичном приближении для случая малой (по сравнению с длиной звуковой волны) жесткой закрепленной сферической частицы радиуса R. Жидкость считается нетеплопроводной, а коэффициент динамической вязкости η полагается не зависящим от температуры. Поле скорости плоской бегущей волны задается в виде $v_0=u_0e^{-i\omega t+ikz}$. Расчет выполнен с точностью до первого члена по степеням малой величины (kR). Необходимые при расчете промежуточные выкладки слишком громоздки и по этой причине воспроизводятся лишь в основных чертах.

Средняя сила, действующая на частицу, есть интеграл от усредненного по периоду тензора плотности потока импульса, взятый по произвольной поверхности S, охватывающей частицу (см., например, [3]). В квадратичном приближении в сферической системе координат (r, θ, φ) с центром в середине частицы формула для расчета средней силы приводится к виду

$$F=-\oint_S[\bar{p}''\cos\theta+\rho_0(\bar{v}_r'^2\cos\theta-\overline{v_r'v_\theta'}\sin\theta)-$$

$$-\eta\left(2\cos\theta\frac{\partial\bar{v}_r''}{\partial r}-\sin\theta\left(\frac{\partial\bar{v}_\theta''}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{v}_r''}{\partial\theta}-\frac{\bar{v}_\theta''}{r}\right)\right)\Bigg]\,dS. \qquad (1)$$

Здесь черта означает усреднение по периоду; одним и двумя штрихами обозначены соответственно поля первого и второго порядков малости. В качестве поверхности S будем выбирать сферу, концентричную с частицей. Согласно (1), для расчета средней силы необходимо знать не только поля первого порядка малости, но и поля средних давления и скорости второго порядка малости. Расчет этих полей и составляет основную трудность в анализе средней силы, действующей на частицу в звуковом поле в вязкой жидкости.

Решение задачи о полях первого порядка — линейной задачи рассеяния плоской бегущей волны на сфере в вязкой жидкости — хорошо известно (см., например, [4]) и может быть представлено через векторный и скалярный потенциалы: $\mathbf{v}'=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_p'$, $\mathbf{v}_p'=-\nabla\times\mathbf{\Psi}'+\nabla\Phi'$,

$$\mathbf{\Psi}'=\Psi'\mathbf{e}_\varphi=\mathbf{e}_\varphi\left(\sum_1^\infty C_n h_n(\varkappa r)P_n^1\right)e^{-i\omega t},\qquad \Phi'=\left(\sum_0^\infty D_n h_n(kr)P_n\right)e^{-i\omega t}.$$

Здесь $\mathbf{e}_\varphi$ — единичный орт сферической системы координат, $\varkappa=(1+i)/\delta$, где $\delta=(2\eta/\rho_0\omega)^{1/2}$ — глубина проникновения вязкой волны, $k=\omega/c$, поскольку, как можно показать, влияние вязкости на волновое число звуковых волн несущественно в пределах принятой точности, $h_n(x)$ — сферическая функция Ханкеля. Коэффициенты C_n и D_n находятся из граничных условий — равенства нулю радиальной и тангенциальной составляющих скорости на поверхности частицы. Выпишем лишь те из них, которые необходимы для дальнейших расчетов:

$$C_1=3Ru_0/(2\varkappa Rh_0(\varkappa R));\qquad C_2=5iRu_0(kR)/(9\varkappa Rh_1(\varkappa R));$$

$$D_0=-Ru_0(kR)^2/3;\qquad D_1=-iRu_0(kR)^2\left[-\frac{1}{2}+\frac{3}{2(\varkappa R)^2}-\frac{3i}{2\varkappa R}\right];$$

$$D_2=\frac{Ru_0}{9}(kR)^4\left[-\frac{2}{3}+\frac{10}{3}\frac{i-3/\varkappa R-3i/(\varkappa R)^2}{\varkappa R(-1-i/\varkappa R)}\right].$$

Расчет полей второго порядка малости проведем на основе уравнений Навье — Стокса и неразрывности для величин второго порядка малости:

$$\rho_0\partial\mathbf{v}''/\partial t+\nabla p''+\eta\nabla\times\nabla\times\mathbf{v}''-\left(\frac{4}{3}\eta+\eta'\right)\nabla\nabla\mathbf{v}''=-\rho_0(\mathbf{v}'\nabla)\mathbf{v}'-\rho'\partial\mathbf{v}'/\partial t; \qquad (2)$$

$$\partial\rho''/\partial t+\rho_0\nabla\mathbf{v}''=-\rho'\nabla\mathbf{v}'-\mathbf{v}'\nabla\rho'. \qquad (3)$$

Представляя поле средней скорости второго порядка в виде $\bar{\mathbf{v}}''=-\nabla\times\times(\mathbf{e}_\varphi\bar{\Psi}'')+\nabla\bar{\Phi}''$, для потенциалов $\bar{\Psi}''$, $\bar{\Phi}''$ из (2), (3) получим:

$$-\nu\nabla^4(\bar{\Psi}''\sin\varphi)=-\overline{(\mathbf{v}'\nabla)\nabla^2(\Psi'\sin\varphi)}+\nabla^2(\Psi'\sin\varphi)\overline{\left(\frac{v_r'}{r}+\frac{v_\theta'}{r}\operatorname{ctg}\theta\right)}-$$

$$-2\overline{\nabla\mathbf{v}'\nabla^2(\Psi'\sin\varphi)}-\sin\varphi(\overline{(\nabla\nabla\mathbf{v}')\times\mathbf{v}'})\mathbf{e}_\varphi; \qquad (4)$$

$$\nabla^2\bar{\Phi}''=\overline{\mathbf{v}'\nabla\nabla\int\mathbf{v}'dt}. \qquad (5)$$

Правая часть этих уравнений может быть определена по известному полю первого порядка малости. С точностью до главного члена по степеням малой величины kR можно пренебречь последним слагаемым в правой части (4) и полностью пренебречь правой частью уравнения (5). Поскольку решения однородного уравнения $\nabla^2\bar{\Phi}''=0$ приводят к такому же полю скорости $\bar{\mathbf{v}}''$, что и часть решений однородного уравнения $\nabla^4(\bar{\Psi}''\sin\varphi)=0$, можно поло-

жить $\bar{\Phi}''=0$. Тогда задача определения поля скорости $\bar{v}''$ сведется лишь к нахождению потенциала $\bar{\Psi}''$.

Согласно (1), вклад в среднюю силу вносят угловая гармоника давления $\bar{p}''$ с угловой зависимостью $\cos\theta$ и гармоники в полях $\bar{v}_r''$ и $\bar{v}_\theta''$, обусловленные первым слагаемым (с угловой зависимостью $\sin\theta$) в разложении потенциала $\bar{\Psi}''$ в ряд по присоединенным полиномам Лежандра P_n^1. В дальнейшем под $\bar{p}''$ и $\bar{\Psi}''$ будем понимать только указанные гармоники. Разлагая правую часть (4) в ряд по присоединенным полиномам Лежандра P_n^1 и оставляя только слагаемое, пропорциональное $P_1^1=\sin\theta$ (поскольку остальные слагаемые, согласно (1), не влияют на среднюю силу), обозначим его радиальную часть, взятую с обратным знаком и деленную на коэффициент кинематической вязкости, через $\sigma(r)$. При расчете $\sigma(r)$ с точностью до первого по kR члена можно ограничиться лишь тремя первыми членами в разложении первичной плоской бегущей волны в ряд по полиномам Лежандра $\mathbf{v}_0=\mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}\sum\limits_0^\infty i^n(2n+1)j_n(kr)P_n$ и членами с коэффициентами C_1, C_2, D_0, D_1, D_2 в разложении рассеянного поля скорости. Получающееся выражение для $\sigma(r)$ слишком громоздко и поэтому здесь не выписано.

Решение уравнения (4) ищем методом вариации постоянных в виде $\bar{\Psi}''=f(r)\sin\theta$. Для радиального множителя $f(r)$ получаем

$$f(r)=\frac{1}{r^2}\left(-\frac{1}{30}\int\limits_R^r x^5\sigma(x)\,dx+X_4\right)+\left(\frac{1}{6}\int\limits_R^r x^3\sigma(x)\,dx+X_3\right)+$$

$$+r\left(-\frac{1}{6}\int\limits_R^r x^2\sigma(x)\,dx+X_2\right)+r^3\left(\frac{1}{30}\int\limits_R^r \sigma(x)\,dx+X_1\right).$$

Константы $X_1,\ldots,X_4$ определяются из граничных условий на поверхности сферы и в бесконечности. Прежде чем приступить к их нахождению, отметим следующее. Плоская бегущая волна $\mathbf{u}_0 e^{-i\omega t+ikz}$ не является, вообще говоря, точным решением нелинейных уравнений гидродинамики. Точное решение наряду с выписанным членом содержит высшие гармоники и стационарную составляющую $\mathbf{v}_{st}$. Ниже предполагаем, что в силу способа излучения плоской волны выполнено равенство $\mathbf{v}_{st}=0$ (это не так, например, при поршневом излучении). Если это равенство не выполнено, то к вычисляемой нами средней силе надо добавить слагаемое $F_д=6\pi\eta v_{st}R$. Итак, полагая, что скорость $\bar{v}''$ на бесконечности стремится к нулю и равна нулю на границе сферы, для констант $X_1,\ldots,X_4$ находим

$$X_1=-\frac{1}{30}\int\limits_R^r \sigma(x)\,dx;\qquad X_2=\frac{1}{6}\int\limits_R^r x^2\sigma(x)\,dx;$$

$$X_3=-\frac{5}{2}R^3X_1-\frac{3}{2}RX_2;\qquad X_4=\frac{3}{2}R^5X_1+\frac{1}{2}R^3X_2.$$

По найденному $\bar{v}''$ и по полям первого порядка из усредненного уравнения (2) может быть определено среднее давление $\bar{p}''=p(r)\cos\theta$. После подстановки получающихся для $\bar{v}''$, $\bar{p}''$ выражений в формулу для средней силы (1) находим

$$F=\frac{4}{3}\pi r^2\left[rg(r)+\eta\frac{6}{r^2}\left(\frac{1}{6}\int\limits_R^r x^3\sigma(x)\,dx+X_3\right)\right]-$$

$$-\oint\limits_S \rho_0(\bar{v}_r'^2\cos\theta-\overline{v_r'v_\theta'}\sin\theta)\,dS, \qquad (6)$$

где $g(r)$ — радиальный множитель перед первым полиномом в разложении

величины $e_\theta(-\rho_0\overline{(v'\nabla)v'}-\overline{\rho'\partial v'/\partial t})$ в ряд по присоединенным полиномам Лежандра P_n^1. Значение средней силы F не зависит от того, где проведена поверхность интегрирования. Если поверхность интегрирования совпадает с поверхностью частицы ($r=R$, $v_r'=v_\theta'=g(R)=0$), то (6) дает

$$F=8\pi\eta X_3. \tag{7}$$

Если поверхность интегрирования выбрана на расстоянии от сферы, превышающем несколько глубин проникновения вязкой волны, формула (6) переписывается следующим образом:

$$F=8\pi\eta\left(\frac{1}{6}\int\limits_R^\infty x^3\sigma(x)\,dx+X_3\right)+F_{\text{рд}}. \tag{8}$$

Последнее слагаемое в правой части этой формулы $F_{\text{рд}}=\frac{4}{3}\pi r^3 g(r)-$ $-\oint\limits_S \rho_0(\bar{v}_r'^2\cos\theta-\overline{v_r'v_\theta'}\sin\theta)\,dS$ представляет собой акустическую часть среднего потока импульса, входящего внутрь поверхности, охватывающей частицу, т. е. силу радиационного давления, вычисленную в [1, 2]. Зная ее значение для случая плоской бегущей волны [2] $F_{\text{рд}}=\frac{3}{2}\rho_0 u_0^2\pi R^2(kR)\times$ $\times(\delta^2/R^2+\delta/R)$, расчет средней силы можно вести по любой из формул (7), (8). Интегралы, встречающиеся при вычислении средней силы, частично берутся в элементарных функциях, а частично представляются через интегральные экспоненты $E_n(\alpha)=\int\limits_1^\infty t^{-n}e^{-\alpha t}dt$, $\alpha=(2{,}1\pm i)R/\delta$. В предельном случае $R\gg\delta$ можно воспользоваться асимптотическим разложением интегральных экспонент и получить $F=\frac{3}{2}\rho_0 u_0^2\pi R^2(kR)\left(\frac{\delta}{R}+o\left(\frac{\delta}{R}\right)\right)$.

Сравнивая это выражение с приведенным выше выражением для силы радиационного давления, видим, что в случае $R\gg\delta$ они совпадают с точностью до главного члена. Поток среднего импульса, уносимый акустическими течениями за пределы охватывающей частицу поверхности, оказывается малым по сравнению с силой радиационного давления. Тем не менее непосредственный учет акустических течений в этом случае необходим для получения правильного результата при интегрировании по поверхности частицы. Без учета акустических течений формула (6) дает неверное (нулевое) значение для средней силы при $r=R$ [5].

В другом предельном случае, $R\ll\delta$, воспользовавшись разложением интегральных экспонент в нуле, для силы F получаем:

$$F=\frac{9}{5}\rho_0 u_0^2\pi R^2(kR)\left(\frac{\delta}{R}+O(1)\right).$$

Сравнивая последнее выражение с выражением для силы радиационного давления, видим, что средняя сила оказывается значительно (примерно в δ/R раз) меньше силы радиационного давления: большая часть среднего потока звукового импульса, входящего внутрь охватывающей частицу поверхности, уносится обратно акустическими течениями. Тем не менее средняя сила пропорциональна (kR) и поэтому значительно больше соответственной средней силы в идеальной жидкости, которая, как известно, пропорциональна $(kR)^4$.

Таким образом, акустические течения, развивающиеся около частицы, существенно влияют на среднюю силу; последовательный расчет средней силы должен учитывать все квадратичные эффекты, в том числе и акустические течения.

В заключение автор выражает благодарность М. А. Миронову за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Westerwelt P. J.* The theory of steady forces caused by sound waves.— J. Acoust. Soc. Amer., 1951, v. 23, № 4, p. 312–315. Acoustics radiation pressure.— J. Acoust. Soc. Amer., 1957, v. 29, № 1, p. 26–29.
2. *Данилов С. Д., Миронов М. А.* О силе радиационного давления, действующей на малую частицу в звуковом поле.— Акуст. журн., 1984, т. 30, № 4, с. 467–473.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
4. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: ГТТИ, 1947.
5. *Миронов М. А.* Механизм радиационного давления звука в реальных средах. VIII Всесоюзн. акуст. конф. Секция Л. М.: 1973, с. 182–183.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24.X.1983