1985

Вып. 2

УДК 534.26;535.312

К ТЕОРИИ СМЕЩЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ ПРИ ОТРАЖЕНИИ

Годин О. А., Прокопюк И.В.

Численными методами исследуется смещение «центра тяжести» ограниченного волнового пучка при отражении от «слабой» границы раздела. Результаты расчетов иллюстрируют границы применимости асимптотических формул, справедливых в предельных случаях, и позволяют проследить зависимость величин смещения от параметров падающего пучка и отражающей границы в промежуточной области.

При отражении ограниченного волнового пучка его огибающая смещается вдоль отражающей границы по отношению к огибающей падающего поля. Величина этого смещения зависит от свойств границы и параметров волнового пучка и может быть велика по сравнению с длиной волны. Рассматриваемое явление нашло ряд важных приложений в различных областях физики. Детальный, хотя и несколько устаревший обзор состояния вопроса дан в статье Г. Лотча [1]. Из более поздних исследований отметим работы [2—8]. В гидроакустике представления о смещении пучков при отражении оказываются плодотворными, в частности в теории боковых волн [9, гл. 4], при расчете коэффициентов затухания нормальных волн [10] и анализе отражения звука от морского грунта [11].

Теория смещения монохроматического волнового пучка в его плоскости падения при полном отражении от плоской границы однородных полупространств, основанная на представлении пучка в виде бесконечной совокупности плоских волн, была построена Л. М. Бреховских [12, 13, § 14]. Эту теорию принято называть классической. Обозначим через k волновое число, через ρ и μ — соответственно плотность и магнитную проницаемость среды, где распространяются падающие и отраженные волны. Соответствующим величинам для среды, от которой происходит отражение, припишем индексы 1. Будем пренебрегать диссипацией энергии волн в средах. Коэффициент отражения плоских волн с углом скольжения χ дается тогда формулой Френеля

$$V(\xi) = |V| \exp(i\varphi) = \frac{m\sqrt{1-\xi^2-\sqrt{n^2-\xi^2}}}{m\sqrt{1-\xi^2}+\sqrt{n^2-\xi^2}}; \quad \xi = \cos\chi : \text{Im}\sqrt{1-\xi^2} \ge 0,$$

$$\text{Im}\sqrt{n^2-\xi^2} \ge 0,$$
(1)

где $n \equiv \sin \delta = k_1/k < 1$ — показатель преломления, δ — критический угол полного отражения. В акустике среды считаем жидкими, $m = \rho_1/\rho$. Для электромагнитных волн параметр m зависит от поляризации: $m = \mu_1/\mu$ для перпендикулярной поляризации, когда вектор напряженности электрического поля колеблется перпендикулярно плоскости падения, и $m = n^2 \mu/\mu_1$ для нараллельной поляризации, когда этот вектор лежит в плоскости падения. Согласно классической теории, хорошо определенный, т. е. остронаправленный, волновой пучок с углом скольжения χ_0 смещается при отражении вдоль границы раздела на величину [13, § 14]

$$\Delta_{\kappa\pi}(\xi_{0}) = -\frac{1}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_{0}} = \frac{2m\xi_{0}(1-n^{2})/\sqrt{(\xi_{0}^{2}-n^{2})(1-\xi_{0}^{2})}}{k[m^{2}(1-\xi_{0}^{2})+\xi_{0}^{2}-n^{2}]}.$$

$$n < \xi_{0} = \cos \chi_{0} < 1.$$
(2)

При закритических углах скольжения $(\xi_0 < n) \Delta_{\kappa\pi}(\xi_0) = 0$.

Формула (2) является точной для пучков с бесконечно узким угловым спектром. Однако она дает расходящиеся разрывные значения и неприменима для реальных волновых пучков, если угол χ мал или близок к π/2-δ в масштабе угла дифракционной расходимости пучка. В работах [14, 15] методом эталонных интегралов [13, § 27] в предположении

$$Q = kw(1-n) \gg 1, \tag{3}$$

где w — характерная ширина огибающей пучка, получены равномерные по углу падения асимптотические формулы для величины смещения при отражении, согласующиеся с классической теорией в области ее применимости. Для хорошо определенных пучков всегда $kw\gg 1$, но неравенство (3) может нарушаться в случае так называемых «слабых» границ раздела, когда $n\approx 1$. Тогда, как и при отражении сферической волны [16], не удается построить полную асимптотическую теорию отражения волнового пучка, поскольку встречающиеся интегралы не выражаются через табулированные специальные функции. Основную трудность представляет случай промежуточных значений параметров, когда $Q \approx 1$.

Между тем отражение пучка от «слабой» границы раздела представляет существенный интерес, в частности, при анализе распространения остронаправленных звуковых пучков сквозь водную толщу океана и отражения таких пучков от донных осадков. Кроме того, именно при отражении от «слабой» границы раздела энергетические характеристики пучка испытывают наибольшее смещение, что важно для инструментальных приложений эффекта. В настоящей работе смещение звукового пучка при отражении исследуется численными методами. Там, где это возможно,

численные результаты сопоставляются с аналитическими.

Будем рассматривать смещение Δ_c «центра тяжести» отраженного пучка относительно падающего по среднему за период колебаний квадрату волнового поля. Для простоты примем, что от перпендикулярной плоскости падения координаты поле не зависит. Тогда справедлива формула [14]

$$\Delta_{c}(\zeta_{0}) = -\int_{n}^{1} |\Phi(\zeta)|^{2} \varphi'(\zeta) d\zeta / \left[k \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\zeta) V(\zeta)|^{2} d\zeta \right], \tag{4}$$

где $\Phi(\xi)$ — спектр падающего пучка по плоским волнам, являющийся фурье-образом огибающей F(x) падающего пучка на границе раздела

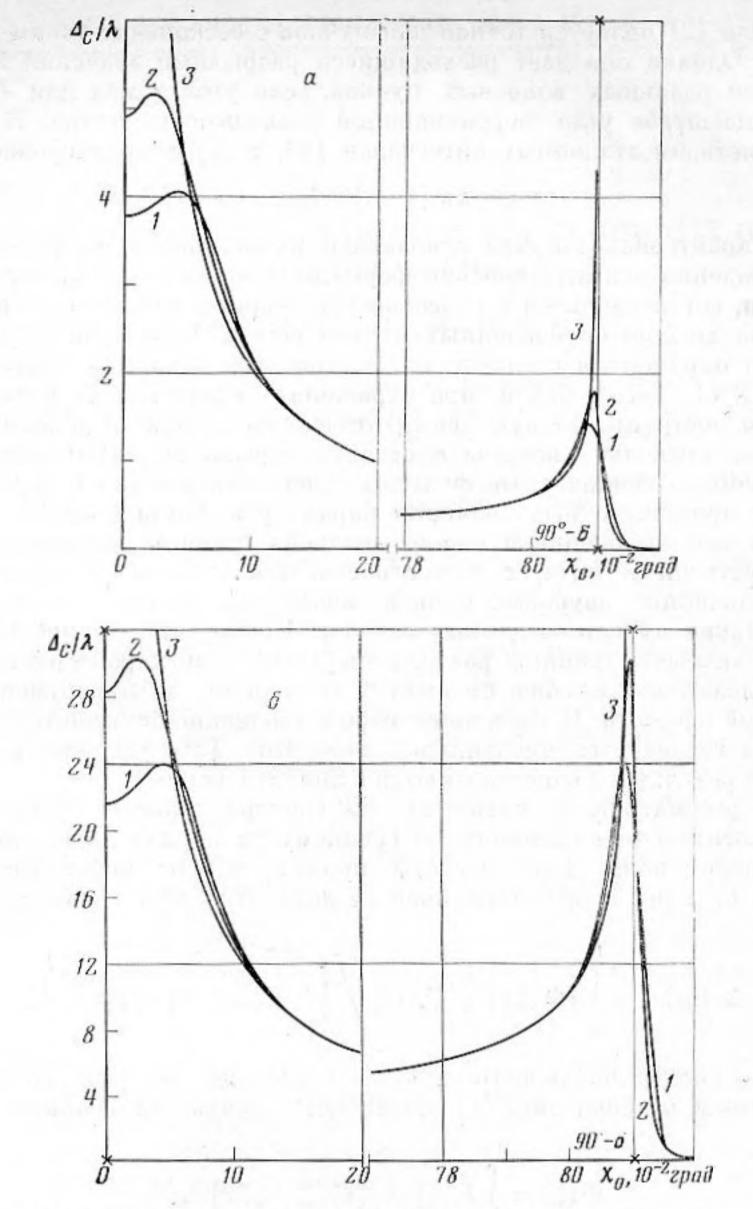
$$\Phi(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \exp[ik(\zeta_0 - \zeta)x] dx.$$
 (5)

Расчет смещения при отражении производился для пучков с гауссовой и лоренцевской огибающими

$$F_1 = \exp[-x^2/(4w^2)]; \quad \Phi_1 = 2\sqrt{\pi}w \exp[-k^2w^2(\xi - \xi_0)^2];$$
 (6)

$$F_2 = [1 + x^2/\widetilde{w}^2]^{-1}; \quad \Phi_2 = \pi \widetilde{w} \exp(-k\widetilde{w}|\xi - \xi_0|).$$
 (7)

Представляет интерес проследить зависимость смещения пучка от его формы. Для этого необходимо разделить эффекты, связанные с формой пучка и влиянием его ширины. Поскольку огибающие F_1 и F_2 не являются геометрически подобными, то рассматриваемое разделение, сводящееся к установлению связи \widetilde{w} и w, по необходимости является условным. Будем считать огибающие «одинаково широкими», если кривые F_4 и F_2 имеют одинаковую ширину на половине высоты, т. е. \widetilde{w} =2(ln 2)% w. На «слабой» границе для электромагнитных волн, как правило, $m\approx$ 1. Отношение плотности осадка и морской воды в придонном слое, когда показатель преломления для звука обращается в 1, примерно равно 1,65 [9, гл. 1]. Смещение при отражении определялось по формуле (4) при следующих значениях параметров падающего пучка и отражающей границы: kw=10 2 ; 10 4 ; 10 5 ; 10 6 ; n=0,9999 m=1; 1,65. Изменение kw в ши-



Фиг. 1. Угловая зависимость смещения при отражении остронаправленного пучка в случае $Q\gg 1$: a-m=1,65; 6-m=1. $1-\Delta_C$ пучка с огибающей F_1 ; $2-\Delta_C$ пучка с огибающей F_2 ; 3 - результат классической теории. Смещение выражено в единицах длины падающей волны $\lambda = 2\pi/k$

роком диапазоне позволило исследовать предельные случаи $Q\gg 1$ и $Q\ll 1$ и переход между ними. Относительная точность вычислений на ЭВМ была не ниже 0,4%.

В случае $kw=10^6$ (фиг. 1) для смещения пучка при отражении характерно наличие ярко выраженных максимумов при малых χ₀ и χ₀≈π/2-δ, где $\Delta_{\kappa\pi}$ стремится к бесконечности. Относительная высота максимумов зависит от m. При m=1,65 максимальное значение Δ_c больше w/4. По мере удаления угла скольжения от 0 и $\pi/2-\delta$ $\Delta_c(\zeta_0)$ с высокой точностью переходит в $\Delta_{\text{кл}}(\xi_0)$. При $|\chi_0 + \delta - \pi/2| \leq (kw)^{-1}$ и $\chi_0 \leq (kw)^{-\frac{1}{2}}$ смещение при отражении зависит от формы огибающей пучка.

В рассматриваемом случае выполнено неравенство (3), позволяющее разбить весь угловой диапазон на две перекрывающиеся части, где вы-

полнено одно из неравенств

$$kw|1-\xi_0|\gg 1;$$
 (8)

$$kw|1-\zeta_0|\gg 1; \tag{8}$$
$$kw|n-\zeta_0|\gg 1. \tag{9}$$

Следуя работам [14, 15], для величин $\Delta_c(\zeta_0)$ пучков с огибающими F_1 и F_2 получаем асимптотические формулы, соответственно,

$$\Delta_{c}(\zeta_{0}) = \frac{iV'(\zeta_{0})}{kV(\zeta_{0})} \frac{\sqrt{y/2} D_{-\frac{y_{2}}{2}}(-y) \exp(-y^{2}/4)}{1 - \alpha \exp(-y^{2}/4) \left[D_{-\frac{y_{2}}{2}}(y) - \sqrt{8/\pi} \alpha D_{-2}(y)\right]}; \quad (10)$$

$$\Delta_{c}(\zeta_{0}) = \frac{iV'(\zeta_{0})}{kV(\zeta_{0})} \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{\sqrt{y}[I_{1}(\sqrt{y})+I_{2}(\sqrt{y})]}{1-\sqrt{y}\pi/2\alpha\exp(-y)(1-\sqrt{8/\pi}\alpha)}; & n \leq \zeta_{0} \leq 1; \\ \frac{\sqrt{\pi y}\exp(y)/2}{1-2\sqrt{2}\alpha[I_{1}(\sqrt{-y})-I_{2}(\sqrt{-y})+2\sqrt{-y}]+4\alpha^{2}(e^{y}-2y)}; & \zeta_{0} \leq n. \end{cases}$$

$$(11)$$

Здесь при условии (8) $\alpha = Q^{-\frac{\eta_2}{2}}/m$, $y = 2kw(\zeta_0 - n)$, а при условии (9) $\alpha = Q^{-\frac{\eta_2}{2}}m$, $y = 2kw(I - \zeta_0)$; $D - \phi$ ункция параболического цилиндра, $I_{1,2}$ выражаются через интеграл вероятности и интеграл Досона [17]

$$I_1(y) = (\sqrt{\pi}/2) \exp(y^2) \operatorname{erfc} y; \quad I_2(y) = \exp(-y^2) \int_0^y \exp(u^2) du.$$
 (12)

Сопоставление величин смещения, вычисленных на ЭВМ и рассчитанных по формулам (10), (11), показало, что их максимальное отличие составляет 1,8%. Таким образом, при $Q\gg1$ точность асимптотических формул даже при величинах Δ_c , сравнимых с w, оказывается вполне удовлетворительной и существенно более высокой, чем оценки точности снизу, приведенные в работах [14, 15].

В случае kw=10² Q≪1, и спектр пучка по плоским волнам меняется медленно по сравнению с коэффициентом отражения. Используя это и

принимая во внимание значения интегралов

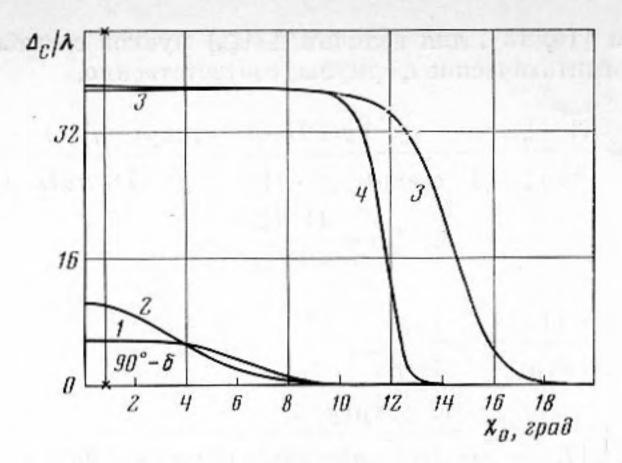
$$\int_{n}^{1} \varphi'(\xi) d\xi = -\pi; \qquad \int_{n}^{1} \varphi'(\xi) (\xi - 1) d\xi = \pi (1 - n) / (m + 1) [1 + O(1 - n)];$$

$$\int_{n}^{+\infty} \left[|V(\xi)|^{2} - \left(\frac{m - 1}{m + 1}\right)^{2} \right] d\xi = \frac{16m^{2}(1 - n)}{(m^{2} - 1)^{2}} \left[\frac{m^{2} + 1}{m^{2} - 1} \ln m - 1\right] [1 + O(1 - n)],$$
(14)

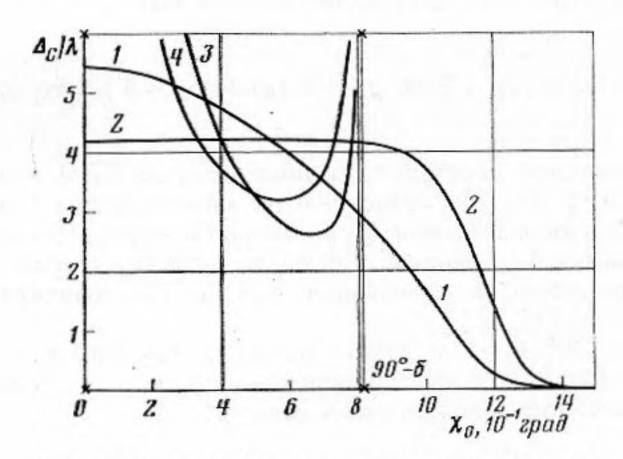
получаем из формулы (4)

$$\frac{\Delta_{c}(\xi_{0}) \approx}{\pi \left[1 + \frac{2(1-n)}{m+1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \ln |\Phi(\xi)|\right) \Big|_{\xi=1}\right]} \approx \frac{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^{2} |\Phi(1)|^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\xi)|^{2} d\xi + \frac{16m^{2}(1-n)}{(m^{2}-1)^{2}} \left(\frac{m^{2}+1}{m^{2}-1} \ln m-1\right)}{(15)}$$

Если m не близко к 1, а спектр $\Phi(\xi)$ является непрерывно дифференцируемым, то относительная погрешность формулы (15) составляет $O(Q^2)$. У пучка с огибающей F_2 спектр является только кусочно-гладким, и в узком угловом диапазоне $n < \xi_0 \le 1$ относительная погрешность возрастает и равна $O(Q^2) + O(kw(\xi_0 - n))$. Формула (15) уточняет и обобщает соответствующий результат статьи [15]. При $m \approx 1$ оценка знаменателя, использованная в формуле (15), справедлива только для умеренных значений



Фиг. 2. Угловая зависимость смещения при отражении пучка для $Q \ll 1$, I, $2-\Delta c$ пучка с огибающими F_1 и F_2 при m=1,65; 3, 4 — то же при m=1



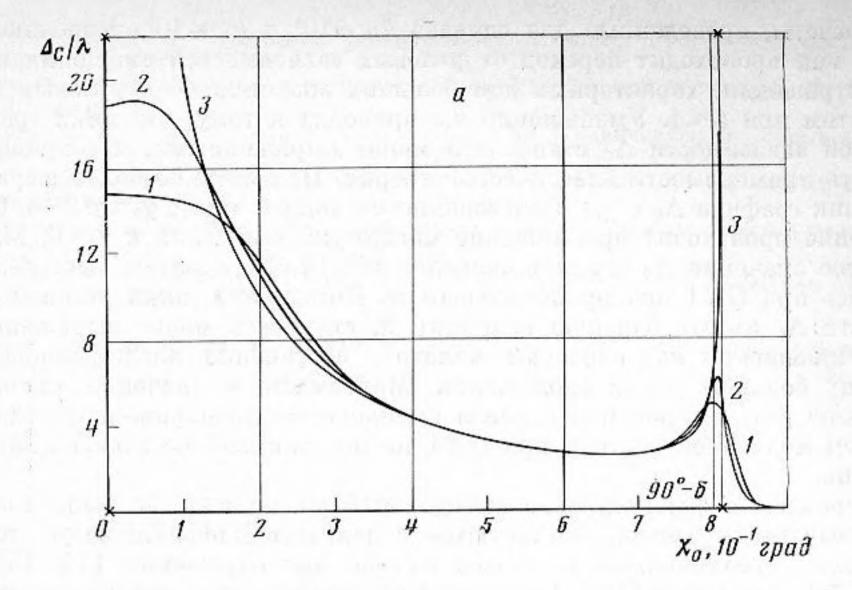
Фиг. 3. Угловая зависимость смещения при отражении пучка для Q=1. 1, $2-\Delta_C$ пучка с огибающей F_1 при m=1,65 и m=1; 3, 4 — результат классической теории при m=1,65 и m=1

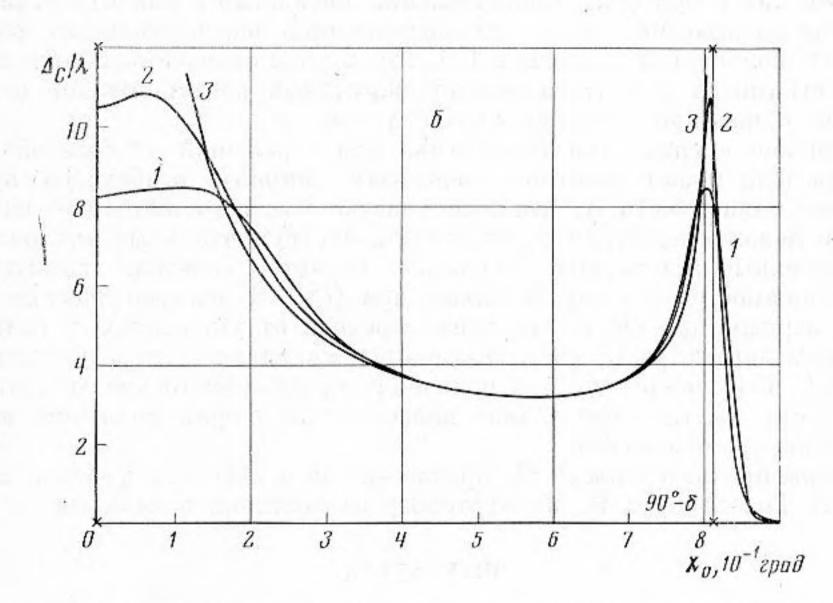
 $kw(1-\zeta_0)$. Тогда из (15) следует

$$\Delta_c(\zeta_0) = 3\pi/[4k(1-n)] \gg w.$$
 (16)

При больших $kw(1-\zeta_0)$ по мере уменьшения $|\Phi(1)|$ в знаменателе формулы (4) становится существенным вклад участка области интегрирования $\zeta \approx \zeta_0$, далекого от $\zeta = 1$, и $\Delta_c(\zeta_0)$ спадает до нуля.

Результат расчета на ЭВМ для рассматриваемого случая показан на фиг. 2. При m=1,65 погрешность формулы (15) не превышает 3,8%. Здесь особенно резко проявляется зависимость смещения при отражении от формы пучка: при огибающей F_1 максимальное значение смещения примерно вдвое меньше, чем при F_2 . Напротив, когда m=1, наибольшее значение Δ_c не зависит ни от формы, ни от ширины пучка. Формула (16) дает уровень «плато» на фиг. 2 с точностью 1%. Расчеты, проведенные для m, близких, но не равных 1, показали, что на слабой границе раздела, если $\mu/\mu_1 \simeq 1$, даже при $Q \ll 1$ поляризационная зависимость смещения при отражении электромагнитных волновых пучков выражена столь слабо, что не может быть показана в масштабе фиг. 2. Таким образом, при $Q \ll 1$ численные результаты не только подтверждают проведенное выше аналитическое рассмотрение и определяют степень его точности, но и существенно дополняют его при $m \approx 1$, показывая характер спадания Δ_c при росте χ_0 .





Фиг. 4. Угловая зависимость смещения при отражении пучка для Q=10: a-m=1.65, b-m=1. $I-\Delta_C$ пучка с огибающей \tilde{F}_1 ; $2-\Delta_C$ пучка с огибающей F_2 ; 3 — результат классической теории

В случае $kw=10^4$ Q обращается в единицу. Качественно угловые зависимости смещения пучка здесь те же (см. фиг. 3), что при $Q \ll 1$, однако величину Δ_c уже нельзя определять по формулам (15) и (16). Максимальное значение смещения выросло по сравнению со случаем $kw=10^2$ на 10% при m=1 и почти в 10 раз — при m=1,65. Угловой дианазон, где смещение имеет заметную величину, сократился почти на порядок из-за сужения спектра пучка. При Q=1 отсутствует область углов падения,

где справедлива классическая теория.

Результаты вычислений на ЭВМ для случая $kw=10^5$ представлены на фиг. 4. Обращает на себя внимание появление диапазона углов скольжения, где результат классической теории совпадает с расчетом на ЭВМ. Значение Q=10 оказывается достаточно большим, чтобы находить $\Delta_c(\zeta_0)$ по формулам (10), (11) почти для всех углов падения. Наибольшие расхождения численных и аналитических результатов, достигающие 20%, имеют место в случае m=1,65 при углах скольжения $\chi_0 \leq 0^\circ, 1$. Расхождения обусловлены главным образом погрешностью асимптотической оценки знаменателя формулы (4).

Расчеты, проведенные для случаев $kw=10^4$ и $kw=10^5$, позволяют понять, как происходит переход от угловых зависимостей смещения пучка при отражении, характерных для больших значений Q, к угловым зависимостям при $Q \ll 1$. Уменьшение kw приводит к тому, что пики графика угловой зависимости Δ_c становятся менее выраженными, и сокращается область применимости классической теории. При m=1,65 более выраженный пик графика Δ_c с $\chi_0 \approx 0$ постепенно поглощает пик с $\chi_0 \approx \pi/2 - \delta$. Одновременно происходит приближение максимума смещения к х₀=0. Максимальное значение Δ_c спадает сначала, как $(kw)^{1/2}$, а затем быстрее, оказываясь при $Q \ll 1$ пропорциональным w. Когда $m \approx 1$, пики угловой зависимости Δ_c имеют близкую величину и, становясь менее выраженными при уменьшении kw, образуют «плато», постепенно расширяющееся в сторону больших углов скольжения. Максимальное значение смещения пучка по углу скольжения сначала уменьшается пропорционально $(kw)^{1/2}$, а затем медленнее, выходя при $Q \ll 1$ на постоянный, не зависящий от wуровень.

Перейдем к формулировке выводов работы. Описанные выше численные результаты хорошо согласуются с данными дифракционной теории смещения ограниченных волновых пучков при отражении [14, 15] как при $Q\gg 1$, так и при $Q\ll 1$. Сопоставление численных и аналитических результатов показывает, что оценки погрешностей асимптотических формул при $Q\gg 1$, полученные в статьях [14, 15], в ряде случаев являются слишком жесткими, и асимптотическими формулами для Δ_c можно пользо-

ваться не только при $\Delta_c \ll w$, но и когда $\Delta_c \simeq w$.

Смещение «центра тяжести» пучка при отражении от «слабой» границы раздела может заметно превышать ширину огибающей пучка; у угловой зависимости Δ_c имеются участки быстрого линейного изменения, что может представлять интерес для инструментальных приложений.

Полученные результаты показывают характер перехода асимптотических зависимостей Δ_c , справедливых при $Q\gg 1$, к асимптотическим формулам, верным при $Q\ll 1$. Условием перехода от умеренных к большим значениям параметра Q, когда применимы аналитические результаты работы [14, 15], можно считать появление протяженного участка угловой зависимости Δ_c , где справедлива классическая теория смещения волновых пучков при отражении.

Авторы признательны Л. М. Бреховских за руководство работой, а также В. В. Гончарову и В. М. Куртепову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

 Lotsch H. K. V. Beam Displacement at Total Reflection: the Goos-Hänchen Effect.— Optik, 1970/1971, v. 32, № 2, p. 116-137; № 3, p. 189-204; № 4, p. 299-319; № 6, p. 553-568.

2. Horowitz B. R., Tamir T. Unified Theory of Total Reflection Phenomena at a

Dielectric Interface. - Appl. Phys., 1973, v. 1, № 1, p. 31-38.

Green M., Kirkby P., Timsit R. S. Experimental Results on the Longitudinal Displacement of Light Beams Near Total Reflection.—Physics Letters, 1973, v. 45A, № 3, p. 259-260.

4. Rhodes D. J., Carniglia C. K. Measurement of the Goos-Hänchen Shift at Grazing Incidence Using Lloyd's Mirror. — J. Opt. Soc. Amer., 1977, v. 67, № 5, p. 679—683.

- Cowan J. J., Anicin B. Longitudinal and Transverse Displacements of a Bounded Microwave Beam at Total Reflection. – J. Opt. Soc. Amer., 1977, v. 67, № 10, p. 1307 – 1314.
- Costa de Beauregard O., Imbert C., Levy Y. Observation of Shifts in Total Reflection of a Light Beam by a Miltilayered Structure. Phys. Rev., 1977, v. D15, № 12, p. 3553-3562.
- Clayes J. M., Leroy O. Reflection and Transmission of Bounded Sound Beams on Half-Spaces and through Plates. – J. Acoust. Soc. Amer., 1982, v. 72, № 2, р. 585–590.
 Годин О. А. О причинах расхождений между результатами различных теорий

эффекта Гооса-Хенхен.— Акуст. журн., 1985, т. 31, № 1, с. 31—36. 9. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. Л.:

Гидрометеоиздат, 1982. 264 с.

Weston D. E., Tindle C. T. Reflection Loss and Mode Attenuation in a Pekeris Model. – J. Acoust. Soc. Amer., 1979, v. 66, № 3, p. 872–879.

11. Weston D. E. Oblique Reflection of Inhomogeneous Acoustic Waves.— J. Acoust. Soc. Amer., 1981, v. 69, № 1, p. 54-59.

12. *Бреховских Л. М.* Отражение ограниченных волновых пучков и импульсов.— Усп. физ. наук, 1953, т. 50, № 4, с. 539—576.

13. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд. 2-е, доп. и перераб. М.: Наука,

1973. 343 с.

14. Годин О. А. Дифракционная теория смещения ограниченных волновых пучков при отражении. 1.— Журн. техн. физ., 1984, т. 54, № 11, с. 2094—2101.

15. Годин О. А. Дифракционная теория смещения ограниченных волновых пучков

GOVERNMENT OF THE PROPERTY OF

AND THE RESERVE THE RESERVE THE PROPERTY OF THE PARTY OF

The state of the s

MERCHANIC FOR THE STATE OF THE

established and contract to the first tracking the first and the second second

whence on the state of the stat

that the transfer of the second course of the secon

and the state of the second se

Character and the second of the second of the second was the second of t

-4 SAME TO THE RESIDENCE OF THE PARTY OF THE

programme the contractor of th

CONTRACTOR OF THE PROPERTY OF

THE LAND WE HAVE THE PROPERTY OF THE PROPERTY

A PROPERTY OF THE RESERVE TO THE RESERVE THE PROPERTY OF THE PARTY OF

The barrier of the state of the

0----

the transfer of the second of

the first the second control of the second c

THE REAL PROPERTY OF THE PROPERTY OF THE PARTY OF THE PAR

The second secon

при отражении. 2.— Журн. техн. физ., 1985, т. 55, № 1. 16. *Бреховских Л. М.* Отражение сферических волн от «слабых» границ раздела.—

Журн. техн. физ., 1948, т. 18, № 4, с. 473—482. 17. Справочник по специальным функциям/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. (пер. с англ.). М.: Наука, 1979, гл. 7, 19.

Институт океанологии им. П. П. Ширшова Академии наук СССР Поступила в редакцию 31.X.1983