АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 2

УДК 534.833

# ЗВУКОИЗОЛЯЦИЯ В МНОГОМОДОВОМ ВОЛНОВОДЕ С НЕОДНОРОДНЫМИ ПОГЛОЩАЮЩИМИ СТЕНКАМИ

*Лапин А. Д.*

Исследовано распространение мод в жидком слое с неоднородными поглощающими границами.

В работе [1] рассмотрена задача о звукоизоляции в многомодовом волноводе, создаваемой периодическими неровностями и неоднородностями его стенок. Однако решение ее было получено лишь для волновода с идеальными (непоглощающими) стенками. Представляет интерес рассмотреть эту задачу для волновода с поглощающими стенками и оценить вклады в звукоизоляцию, вносимые эффектами рассеяния и поглощения волн. Ниже дано решение этой задачи в предположении, что неоднородные поглощающие стенки волновода характеризуются акустической проводимостью.

Рассмотрим простейший волновод — однородный жидкий слой, у которого нижняя граница ($z=0$) — абсолютно жесткая, а верхняя граница ($z=h$) характеризуется акустической проводимостью $Y(x)$. Величину $Y(x)$ зададим в виде $Y(x)=(iX+R)[1+2a\cos(\beta x)]$ $0<x<L$, $Y(x)=(iX+R)$, $x<0$, $x>L$, где $R\ll|X|$, $a\ll1$. Пусть на неоднородности падает мода с давлением

$$P_{\text{пад}}=A\exp(i\xi x)\cos(\zeta z), \tag{1}$$

где $\zeta$ — решение дисперсионного уравнения $(\zeta h)\operatorname{tg}(\zeta h)=-i\rho ckh(iX+R)$, $\xi=\sqrt{k^2-\zeta^2}$, $k$ — волновое число, $\rho$ и $c$ — соответственно плотность среды и скорость звука в ней. Согласно работе [2], имеем приближенно $\xi=\xi_0+i\delta$, $\zeta=\zeta_0-i\delta\xi_0/\zeta_0$, где

$$\delta=\frac{\rho ckR}{\xi_0 h}\left\{[1+\operatorname{tg}^2(\zeta_0 h)]+\frac{1}{(\zeta_0 h)}\operatorname{tg}(\zeta_0 h)\right\}^{-1},$$

$\xi_0$ и $\zeta_0$ — соответственные значения величин $\xi$ и $\zeta$ для границы с чисто реактивной проводимостью $iX$. Требуется найти полное звуковое поле $p$ в волноводе с неоднородными стенками при периоде неоднородностей, равном или близком $\pi/\xi_0$. Согласно соотношению Брэгга, эти периодические неоднородности эффективно отражают падающую моду (1).

Решение задачи получим методом связанных мод [3, 4]. Звуковое поле в волноводе с малыми синусоидальными неоднородностями ищем в виде $p(x,z)=\exp[i(\xi+\mu)x]f(x,z)$, где $|\mu|\ll\xi_0$, $f(x,z)$ — периодическая по $x$ функция с периодом $2\pi/\beta$. Разлагая эту функцию в ряд Фурье и используя уравнение Гельмгольца и граничное условие $(\partial p/\partial z)_{z=0}=0$, получим следующее выражение для $p$

$$p(x,z)=M_0\exp[i(\xi+\mu)x]\cos(\zeta_0'z)+M_{-1}\exp[i(\xi+\mu-\beta)x]\cos(\zeta_{-1}'z)+ +M_{+1}\exp[i(\xi+\mu+\beta)x]\cos(\zeta_{+1}'z)+\ldots, \tag{2}$$

где $\zeta_n'=\sqrt{k^2-(\xi+\mu+n\beta)^2}$, $n=0;\ \pm1,\ldots$ . Амплитуды $M_n$ подберем таким образом, чтобы поле (2) удовлетворяло граничному условию на неоднородной стенке

$$(\partial p/\partial z)_{z=h}=ik\rho c(iX+R)[1+2a\cos(\beta x)]p(x,h). \tag{3}$$

С этой целью подставим формулу (2) в соотношение (3) и приравняем нулю коэффициенты при гармониках $\exp[i(\xi+\mu+n\beta)x]$. Тогда получим бесконечную систему алгебраических уравнений для амплитуд спектров. Как и в работе [3], ограничимся учетом взаимодействия двух спектров 0, −1 и тогда «усеченная» система линеаризованных уравнений принимает вид

$$\mu M_0+\frac{k\rho cXa}{\xi_0 hS}M_{-1}=0,$$

$$\frac{k\rho cXa}{\xi_0 hS}M_0-(\mu-\gamma+2i\delta)M_{-1}=0,$$

где

$$\gamma=\beta-2\xi_0,\quad |\gamma|\ll\xi_0,\quad \delta=k\rho cR/\xi_0 hS,\quad S=\left\{[1+\mathrm{tg}^2(\zeta_0 h)]+\frac{1}{(\zeta_0 h)}\mathrm{tg}(\zeta_0 h)\right\}.$$

Из равенства определителя этой системы нулю найдем допустимые значения $\mu^+$ и $\mu^-$:

$$\mu^\pm=(\gamma/2-i\delta)\pm\sqrt{(\gamma/2-i\delta)^2-[k\rho cXa/\xi_0 hS]^2}.$$

Отношение амплитуд $M_{-1}/M_0$ получим по формуле

$$(M_{-1}/M_0)^\pm=-\frac{\xi_0 hS}{k\rho cXa}\mu^\pm.$$

При учете обоих допустимых значений $\mu$ звуковое поле в неоднородном участке волновода принимает вид

$$p(x,z)\approx M_0^+\{\exp[i(\xi+\mu^+)x]+(M_{-1}/M_0)^+\exp[i(\xi+\mu^+-\beta)x]\}\cos(\zeta z)+$$
$$+M_0^-\{\exp[i(\xi+\mu^-)x]+(M_{-1}/M_0)^-\exp[i(\xi+\mu^--\beta)x]\}\cos(\zeta z). \qquad (4)$$

В однородных полуволноводах звуковые поля получим по следующим формулам:

$$\text{при } x<0\quad p(x,z)=A\{\exp(i\xi x)+V\exp(-i\xi x)\}\cos(\zeta z), \qquad (5)$$

$$\text{при } x>L\quad p(x,z)=AW\exp[i\xi(x-L)]\cos(\zeta z), \qquad (6)$$

где $V$ и $W$ — соответственно коэффициенты отражения и прозрачности.

«Сшивая» поля (4) и (5) при $x=0$ и поля (4) и (6) при $x=L$, найдем коэффициенты $M_0^+$, $M_0^-$, $V$ и $W$. Не приводим общие выражения для этих коэффициентов из-за их громоздкости. При резонансе $\beta=2\xi_0$ модули коэффициентов отражения и прозрачности соответственно равны

$$|V|=\frac{\delta_r/\alpha}{\mathrm{cth}(\alpha L)+\delta/\alpha},\qquad |W|=\frac{1}{\mathrm{ch}(\alpha L)+(\delta/\alpha)\mathrm{sh}(\alpha L)},$$

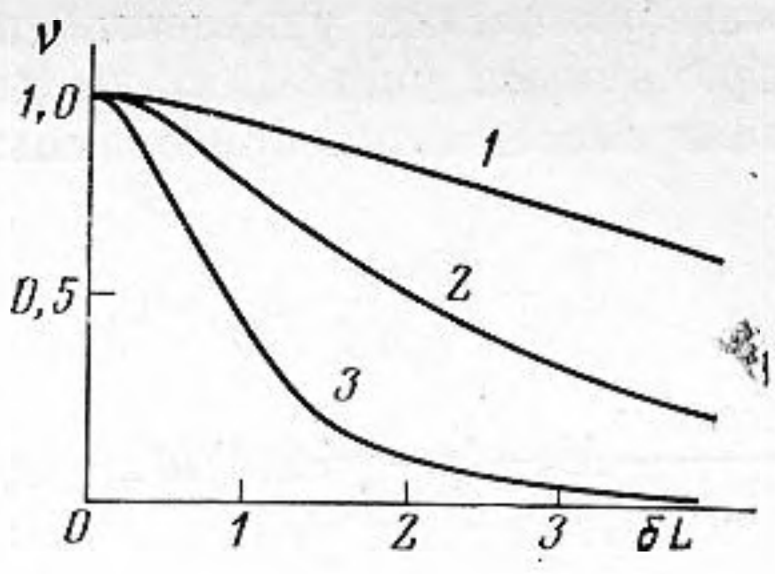
где $\alpha=\sqrt{\delta^2+\delta_r^2}$, $\delta_r=k\rho ca|X|/(\xi_0 hS)$.

Звукоизоляция, создаваемая неоднородным поглощающим участком, равна $-20\lg|W|$ дБ. Она растет как при увеличении $\delta$ (увеличивается поглощение звука на стенке), так и при увеличении $\delta_r$ (увеличивается отражение звука от неоднородностей).

Для однородной поглощающей стенки ($\delta\neq0$, $\delta_r=0$) и для неоднородной непоглощающей стенки ($\delta=0$, $\delta_r\neq0$) величины $|W|$ соответственно равны $\exp(-\delta L)$ и $1/\mathrm{ch}(\delta_r L)$.

Отношение модулей коэффициентов прозрачности для неоднородной и однородной поглощающих стенок получим по формуле

$$\nu=\frac{|W|}{|W|_{\delta_r=0}}=\frac{\exp(\delta L)}{\mathrm{ch}(\alpha L)+(\delta/\alpha)\mathrm{sh}(\alpha L)}.$$




Зависимость величины ν от δL

Для иллюстрации на фигуре дана зависимость величины ν от $\delta L$. Кривые *1*, *2*, *3* получены соответственно при $\delta_r/\delta=0{,}5$, 1 и 2. Они показывают, что звукоизоляция в волноводе с неоднородными поглощающими стенками растет при увеличении амплитуды $a$ периодических неоднородностей.

Все расчеты выполнены при учете «двухмодового взаимодействия». Учет взаимодействия большего числа спектров не изменяет существенно результаты и приводит лишь к смещению резонансного значения β на малую величину $\sim 2\xi_0 a^2$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Лапин А. Д.* Звукоизоляция в многомодальном волноводе, создаваемая периодическими неровностями и неоднородностями его стенок.– Акуст. ж., 1977, т. 23, № 6, с. 899–906.
2. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973, § 73, с. 250–252.
3. *Kogelnik H., Shank S. V.* Coupled – Wave Theory of Distributed Feedback Lasers.– J. Appl. Phys., 1972, v. 43, № 5, p. 2327–2335.
4. *Элаши Ш.* Волны в активных и пассивных периодических структурах (обзор).– ТИИЭР, 1976, т. 64, № 12, с. 22–59.



Акустический институт им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР



Поступила в редакцию
8 VII.1983