

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУЗЫРЬКОВ, КОАГУЛИРУЮЩИХ
В ЗВУКОВОМ ПОЛЕ**

Максимов А. О.

Звуковая волна, распространяющаяся в жидкости с пузырьками газа изменяет характеристики самой среды [1]. Пузырьки под действием сил радиационного давления внешнего поля совершают упорядоченное движение и взаимодействуют друг с другом посредством перерассеянного поля [2, 3]. Притяжение за счет сил Беркнеса приводит к коагуляции пузырьков. Изменение распределения пузырьков по радиусам $n(\mathbf{r}, t, R)$ в данной точке \mathbf{r} в момент времени t описывается кинетическим уравнением:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U}n) = -I(n); \quad I(n) = I_- + I_+, \quad (1)$$

$$I_-(n) = \int_0^\infty dR' \sigma(R, R') |U(R) - U(R')| n(R) n(R'),$$

$$I_+(n) = \frac{1}{2} \int_0^R dR' \sigma(R', R'') |U(R') - U(R'')| R^2/R''^2 n(R') n(R'');$$

здесь R — радиус пузырька, \mathbf{U} — скорость поступательного движения: $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 - (1-s^2) \times \times [(1-s^2)^2 + \delta^2]^{-1} (6\nu)^{-1} [\Psi \nabla \Psi^* + \Psi^* \nabla \Psi] - i\delta (6\nu)^{-1} [(1-s^2)^2 + \delta^2] [\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi]$, \mathbf{U}_0 — скорость пузырька в отсутствие поля; $s \equiv \omega_0/\omega$; ω_0, δ — собственная частота и постоянная затухания пузырька, ω, Ψ — частота и потенциал внешнего поля, ν — кинематическая вязкость, σ — сечение столкновения пузырьков, согласно [4] $\sigma |U_1 - U_2| = = 4\pi k$ при $k \geq 0$ и 0 при $k < 0$, $k = (R_1 + R_2) (3\nu)^{-1} [(s_1^2 - 1)(s_2^2 - 1) + \delta_1 \delta_2] [(s_1^2 - 1)^2 + \delta_1^2]^{-1} \times \times |\Psi|^2 [(s_2^2 - 1)^2 + \delta_2^2]^{-1}$. Уравнение (1) получено в работе [5], однако слагаемое интеграла столкновений I_+ содержало ряд неточностей. Отсутствовали множитель R^2/R''^2 , возникающий при интегрировании плотности вероятности появления пузырька радиуса R в результате слияния пузырьков с радиусами R' и R'' ($4\pi R^2 \delta (4\pi/3R^3 - -4\pi/3R'^3 - 4\pi/3R''^3)$) и сомножитель $1/2$, обеспечивающий однократный учет процесса $R' + R'' \rightarrow R$. Отметим, что выражение для I_+ в (1) согласуется с результатами работы [6], в которой получено кинетическое уравнение для пузырьков, коагулирующих за счет гидродинамических сил.

Традиционной методикой исследования сил Беркнеса является изучение динамики пузырьков в поле стоячей волны [7–9]. При этом пузырьки с размером, меньшим резонансного (собственная частота монополярных колебаний резонансного пузырька совпадает с частотой внешнего поля $\omega_0(R_*) = \omega$), собираются в окрестности пучности поля — области, где сила радиационного давления стоячей волны уравновешивает силу плавучести. Поскольку для дорезонансных пузырьков $R < R_*$ положение равновесия слабо зависит от радиуса, в окрестности пучности плотность пузырьков может быть велика и поэтому следует учитывать их взаимодействия. В результате коагуляции в пелене будут появляться пузырьки больших размеров вплоть до резонансного. Для зарезонансных пузырьков $R > R_*$ меняется знак силы радиационного давления, и такие пузырьки покидают пелену. Процесс будет стационарным при генерации пузырьков малого размера, создаваемых, например, путем электролиза воды на тонких электродах. В уравнение (1) при этом нужно ввести плотность источника $S(\mathbf{r}, R)$, локализованного в пространстве размеров вблизи R_0 ($R_0 \ll R_*$). При описании этой ситуации естественно выделяются три области характерных размеров: источник $R \sim R_0$ ($S(\mathbf{r}, R) - I(n) = \operatorname{div}(\mathbf{U}n)$), сток $R \sim R_*$ ($\operatorname{div}(\mathbf{U}n) = -I(n)$) и инерционный интервал $R_0 \ll R \ll R_*$ ($I(n) = 0$).

Покажем, следуя [10], что симметрия (однородность) оператора столкновений позволяет найти точное решение нелинейного интегрального уравнения $I(n) = 0$. В инерционном интервале $s \gg 1$, поэтому ядро интеграла столкновений может быть записано в упрощенном виде: $w(R_1, R_2) \equiv \sigma(R_1, R_2) |U_1 - U_2| \approx (4\pi/3\nu) (R_1 + R_2) \times \times s_1^{-2} s_2^{-2} |\Psi|^2$. Рассмотрим подобные процессы $R' + R'' \rightarrow R$ и $R + Q' \rightarrow Q''$, причем $Q' = = g_1 R'$, $Q'' = g_1 R = g_1^2 R'$, $g_1 = R/R'$, для них имеем:

$$I_-(n) = \int_0^\infty dQ' w(R, Q') n(R) n(Q') = \int_0^\infty dQ' \int_0^\infty dQ'' w(R, Q') \times$$

$$\times n(R) n(Q') 3Q''^2 \delta(Q''^3 - Q'^3 - R^3) = \int_0^\infty dR' \int_0^\infty dR'' g_1^3 w(R', R'') \times$$

$$\times g_1 n(g_1 R') n(g_1 R'') 3R'^2 g_1^4 g_1^{-3} \delta(R^3 - R'^3 - R''^3) =$$

$$= \int_0^R dR' w(R', R'') n(g_1 R') n(g_1 R'') g_1^3 R^2 / R''^2,$$

аналогично для $Q' = g_2 R'$, $Q'' = g_2 R = g_2^2 R''$, $g_2 = R/R''$

$$I_-(n) = \int_0^R dR' w(R', R'') n(g_2 R') n(g_2 R'') g_2^3 R^2 / R''^2.$$

В результате интеграл столкновений можно представить в факторизованном виде

$$I(n) = -1/2 \int_0^R dR' w(R', R'') R^2 / R''^2 [n(R') n(R'') - g_1^3 n(g_1 R') n(g_1 R'') - g_2^3 n(g_2 R') n(g_2 R'')]. \quad (2)$$

Для степенных распределений $n(R) = n_0 (R_0/R)^\alpha$ выражение в квадратных скобках (2) пропорционально $[1 - (R/R')^{3-2\alpha} - (R/R'')^{3-2\alpha}]$. Условие сохранения объема газа при коагуляции пузырьков определяет показатель степени $\alpha = 3$. Полученному решению отвечает постоянный поток по спектру размеров. Множитель n_0 определяется из сшивки с решением в окрестности источника. По порядку величины имеем $n_0 \sim (S(R_0) v / |\Psi|^2)^{1/2} (s_1^2 / R_1)$.

Следует отметить, что для данного распределения наиболее интенсивно идут процессы с участием пузырьков малого размера, однако при этом «уходы» и «приходы» в интеграле столкновений компенсируют друг друга. В результате распределение пузырьков по радиусам формируется за счет коагуляции пузырьков сравнимых размеров, что оправдывает предположение о существовании инерционного интервала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобелев Ю. А., Островский Л. А., Сутин А. М. Эффект самопросветления для акустических волн в жидкости с пузырьками газа.— Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, № 7, с. 423–425.
2. Bjerknes C. A. Hydrodynamische Fernkräfte. Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann, 1915, p. 161–175.
3. Алексеев В. Н. К вопросу о радиационной силе давления звука на сферу.— Акуст. журн., 1983, т. 29, № 2, с. 129–136.
4. Кобелев Ю. А. Нелинейные дипольные колебания сферической частицы в звуковом поле.— Акуст. журн., 1983, т. 29, № 6, с. 783–789.
5. Кобелев Ю. А., Островский Л. А. Коллективное самовоздействие звука в жидкости с пузырьками газа.— Письма в ЖЭТФ, 1983, т. 37, № 1, с. 5–8.
6. Головин А. М., Петров А. Г. О спектре коагулирующих пузырей в жидкости малой вязкости.— МЖГ, 1970, № 4, с. 130–136.
7. Eller A. Force on a bubble in a standing acoustic wave.— JASA, 1968, v. 43, No 1, p. 170–171.
8. Crum L. A. Bjerknes forces on bubbles in a stationary sound field.— JASA, 1975, v. 43, No 6, part 1, p. 1363–1370.
9. Crum L. A., Prosperetti A. Nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids: An interpretation of some experimental results.— JASA, 1983, v. 73, No 1, p. 121–127.
10. Кац А. В., Конторович В. М. Свойства симметрии интеграла столкновений.— ЖЭТФ, 1973, т. 64, № 1, с. 153–163.

Тихоокеанский океанологический институт ДВНЦ АН СССР

Поступило в редакцию
17.VII.1984

УДК 534.2:532

ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ И СКОРОСТИ, ВОЗБУЖДАЕМОЕ РАСШИРЯЮЩИМСЯ ЦИЛИНДРОМ

Петухов Ю. В.

В работе [1] на примере точно решаемой задачи о расширении сферического поршня в воздухе проведены сравнения для поля давления и скорости с соответствующими характеристиками, вычисленными с использованием приближенного метода Кирквуда — Бете [2]. В целях дальнейшего выяснения погрешностей, которые возникают при использовании указанного приближения для описания процессов генерации ударных волн цилиндрической симметрии, с которыми чаще всего приходится иметь дело при электрогидравлическом способе возбуждения, ниже рассмотрена задача о расширении цилиндрического поршня.