АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXI 1985 Вып. 5

УДК 534.222

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ЗВУКА В ГОРИЗОНТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ ОКЕАНЕ В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ С УЧЕТОМ ПОПРАВОК

Явор М. И.

Предложен метод асимптотического расчета второго приближения метода двухмасштабных разложений для квазинормальных волн горизонтально-неоднородного подводного волновода. На основе этого метода оценена применимость адиабатического приближения для реального океана и проведен расчет поля точечного источника звука.

При расчетах звуковых полей в океане, скорость звука в котором медленно меняется по горизонтальным координатам, часто используется обобщение метода нормальных волн — суммирование «квазинормальных волн» в адиабатическом приближении. Адиабатическое приближение является первым приближением метода двухмасштабных разложений [1], известного также как метод «горизонтальных лучей и вертикальных мод» [2]. Как показано в работах [3, 4], погрешность адиабатического приближения растет при увеличении частоты звука. Поэтому важной задачей является, во-первых, установление пределов применимости адиабатического приближения для реальных условий океана и, во-вторых, учет поправок к адиабатическому приближению, когда это необходимо.

В настоящей работе предлагается простой метод асимптотического расчета поправок к адиабатическому приближению для того случая, когда вертикальный профиль скорости звука в океане имеет один минимум. Идея этого метода впервые была использована в работах [3, 4] для получения оценок применимости адиабатического приближения. Как будет показано, этот метод приводит также к простым и удобным для практического использования формулам. Из приведенных в работе результатов расчетов следует, что для типичных условий распространения звука в океане поправка к адиабатическому приближению уже на частоте 25 Гц достигает 100%. Однако в том случае, когда источник звука и точка наблюдения находятся в областях, где океан горизонтально-однороден, и лишь разделены горизонтально-неоднородной областью, вызванной, например, океаническим течением, на такой же частоте «остаточные» поправки для квазинормальных волн, прошедших неоднородный участок, малы (порядка 20—30%), и в этом случае еще можно пользоваться адиабатическим приближением.

Поправки к адиабатическому приближению могут быть получены также методом плавных возмущений [5, 6]. Между поправками второго приближения, полученными двумя методами, существует простая связь: те же выражения, которые в методе двухмасштабных разложений являются поправками к комплексной амплитуде квазинормальной волны, в методе плавных возмущений являются поправками к ее показателю экспоненты. Метод плавных возмущений имеет более широкий по частоте диапазон применимости, так как работает и тогда, когда величины поправок второго приближения сравнимы с единицей (в методе двухмасштабных разложений эти поправки должны быть малы). Однако выражения для поправок, полученные методом двухмасштабных разложений, имеют более удобную для использования форму. В первую очередь это относится к поправкам к квазинормальным волнам, точки поворота которых близки к границам волновода (соответствующие выражения, полученные методом плавных возмущений [7], из-за громоздкости трудно непосредственно применить

в расчетах). Поэтому в настоящей работе выражения для поправок получены методом двухмасштабных разложений. В дальнейшем же при расчетах они используются как поправки к фазам квазинормальных волн.

Пусть скорость распространения звука в океане $c(\zeta, \xi)$ зависит от безразмерной глубины $\zeta=z/d$ и медленной горизонтальной координаты $\xi=\varepsilon x/d$, где $d=c^*/\max|dc/dz|$ — масштаб изменения скорости (c^* — некоторое фиксированное значение скорости) и $\varepsilon\ll 1$ — малый параметр. Зависимость скорости от второй горизонтальной координаты $\eta=\varepsilon y/d$ отсутствует. Безразмерная глубина океана равна h и дно океана — жидкое полупространство $\zeta\geqslant h$ с постоянной скоростью распространения звука c_h. Отношение плотности дна к плотности воды при $\zeta=h$ примем равным $\varkappa$.

Квазинормальные волны u_m ($m=1, 2, \ldots$), описывающие распространение звука частоты ω, согласно методу двухмасштабных разложений [1], ищутся в виде разложения по степеням ε. Будем считать, что точка наблюдения расположена в плоскости $\eta=0$. В этом случае

$$u_m(\zeta, \xi, 0)=e^{i\frac{p}{\varepsilon}\tau_m(\xi)}\sum_{j=0}^{\infty}\psi_{m,j}(\zeta, \xi)\varepsilon^j, \tag{1}$$

где

$$\tau_m=\int_0^{\xi}\mu_m(s)\,ds.$$

Функции μ_m, $\psi_{m,j}$ определяются из рекуррентной последовательности задач Штурма — Лиувилля. В частности, функции $\mu_m(\xi)$ являются собственными значениями задачи

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}+p^2[\hat{n}^2(\zeta, \xi)-\mu_m^2(\xi)]\psi=0, \tag{2}$$

$$\psi|_{\zeta=0}=0,\quad \psi|_{\zeta=h-0}=\psi|_{\zeta=h+0},\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=h-0}=\frac{1}{\varkappa}\left.\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=h+0}, \tag{3}$$

$$\lim_{\zeta\to\infty}\psi=0, \tag{4}$$

где

$$\hat{n}(\zeta, \xi)=\begin{cases} n(\zeta, \xi)=c^*c^{-1}(\zeta, \xi) & 0\leqslant\zeta\leqslant h,\\ n_h=c^*c_h^{-1}, & \zeta>h,\end{cases}$$

$p=\omega d/c^*$ — безразмерный параметр (для реального океана $p\sim 100\nu$, где $\nu=\omega/2\pi$ измеряется в Гц). Заметим, что большой параметр p не зависит от глубины h, что является принципиальным различием между асимптотическим подходом в методе нормальных волн и лучевым методом. Следует указать (не имея возможности остановиться на этом подробно), что можно уточнить введенную формулу для параметра p, учтя в ней влияние второй производной $\partial^2c/\partial\zeta^2$. В ряде случаев такое уточнение уменьшает величину p в 5—10 раз.

Коэффициенты $\psi_{m,0}$ разложения (1) имеют вид $\psi_{m,0}=A_{m,0}(\xi)f_m(\zeta, \xi)$, где f_m — собственная функция задачи (2)—(4), отвечающая собственному значению μ_m:

$$A_{m,0}=(\mu_m I_m N_m)^{-1/2},\quad N_m=\int_0^{\infty}f_m^2(\zeta, \xi)\,d\zeta,\quad I_m=\int_0^{\xi}\mu_m^{-1}(s)\,ds.$$

Функции $\psi_{m,1}$ могут быть записаны в виде [4] $\psi_{m,1}=A_{m,1}(\tau_m)\psi_{m,0}+\eta_{m,1}(\zeta, \tau_m)$, где

$$\eta_{m,1}=\frac{ip}{W_m}\mu_m^2A_{m,0}\int_0^{\zeta}[2\dot{f}_m-\gamma_m f_m][f_m(\zeta)\tilde{f}_m(t)-f_m(t)\tilde{f}_m(\zeta)]\,dt, \tag{5}$$

$$A_{m,1}=\frac{1}{2}\int_0^{\tau_m}\mu_m I_m A_{m,0}\int_0^{\infty}\Big[2\Big(\dot f_m-\frac{1}{2}\gamma_m f_m\Big)\eta_{m,1}-$$

$$-\frac{1}{ip\mu_m^2}f_m\sqrt{\frac{\mu_m}{I_m}}\frac{\partial}{\partial\tau_m'}(\sqrt{\mu_m^3 I_m}\dot\psi_{m,0})\Big]dtd\tau_m'-$$

$$-\mu_m I_m A_{m,0}\int_0^{\infty}\eta_{m,1}f_m dt\,|_{\tau'_m=\tau_m}, \qquad (6)$$

$\tilde f_m$ — решение уравнения (2), линейно-независимое с f_m, $W_m=f_m\tilde f_m'-\tilde f_m f_m'$ — определитель Вронского, $\gamma_m=\dot N_m N_m^{-1}$, точкой обозначена производная по τ_m, штрихом — производная по ζ.

Решение задачи о звуковом поле $U(\zeta,\xi,\eta)$ точечного источника, помещенного на оси z на глубине $\zeta=\zeta_0$, может быть представлено (при пренебрежении полем головной волны) разложением по квазинормальным волнам $U(\zeta,\xi,\eta)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m(\zeta_0)u_m(\zeta,\xi,\eta)$. Коэффициенты возбуждения B_m при условии $dc/d\xi|_{\xi=0}=0$ имеют вид

$$B_m(\zeta)=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi\rho\varepsilon^{-1}d^2}}f_m(\zeta,0)\,[\mu_m(0)N_m(0)]^{-1/2}.$$

Будем считать, что при каждом ξ зависимость скорости звука от глубины имеет только один минимум на некоторой глубине $\zeta^*=\zeta^*(\xi)$. Получим асимптотики второго приближения $\psi_{m,1}$ при $p\to\infty$ в предположении, что $m\gg1$ (результаты расчетов показывают, что погрешность этих асимптотик заметна лишь при $m\leqslant3$). Обозначим $n_s=n(0,\xi)$, $n_b=n(h,\xi)$, ζ_1 и ζ_2 — точки поворота для уравнения (2), т. е. границы интервала $[\zeta_1,\zeta_2]\subset\subset[0,h]$, на котором $n(\zeta,\xi)\geqslant\mu$. Положим для определенности, что $n_b<n_s$ при любом ξ. Формулы для других ситуаций могут быть получены аналогичным образом.

Пусть, например, $n_b+\delta_b<\mu_m<n_s-\delta_s$, где δ_b, δ_s — некоторые малые величины, о практическом выборе которых будет сказано ниже. В этом случае асимптотика дисперсионного уравнения для собственных значений μ_m имеет вид [1]

$$\theta(\mu_m)=m/p, \qquad (7)$$

где $\theta(\mu)=\Delta(\mu)$, $\Delta(\mu)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\zeta_2}\sqrt{n^2-\mu^2}\,d\zeta+\frac{1}{4p}$. Асимптотика собственной функции f_m при $0\leqslant\zeta\leqslant h$ имеет вид $f_m\sim(\varphi_m')^{-1/2}v(p^{2/3}\varphi_m(\zeta,\xi))$, где $v(t)$ — функция Эйри [8], имеющая при $t\to-\infty$ асимптотику $v(t)\sim(-t)^{-1/4}\times\times\sin([^2/_3]|t|^{3/2}+\pi/4)$, $\varphi_m(\zeta,\xi)=\varphi(\zeta,\xi,\mu_m)$,

$$\varphi(\zeta,\xi,\mu)=\Big[\frac{3}{2}\Big|\int_{\zeta}^{\zeta_2}\sqrt{|\mu^2-n^2|}\,d\zeta\Big|\Big]^{2/3}\operatorname{sign}(\zeta-\zeta_2).$$

Для выбранной таким образом функции f_m асимптотика N_m может быть вычислена по формуле

$$N_m\sim-\pi\theta'(\mu_m)/2p^{1/3}\mu_m. \qquad (8)$$

Функцию $\tilde f_m$ при $0\leqslant\zeta\leqslant h$ выберем в виде $\tilde f_m\sim(\varphi_m')^{-1/2}u(p^{2/3}\varphi_m)$, где $u(t)$ — функция Эйри, имеющая при $t\to-\infty$ асимптотику $u(t)\sim(-t)^{-1/4}\cos([^2/_3]\times\times|t|^{3/2}+\pi/4)$. Тогда определитель Вронского $W_m=p^{2/3}$.

Для получения асимптотик функций $\eta_{m,1}$ и $A_{m,1}$, определенных формулами (5), (6), необходимо знать асимптотики интегралов, содержащих произведения функций Эйри и их производных. Такие асимптотики могут быть получены интегрированием по частям (см. [3]). Например, асимптотика интеграла

$$J=\int_0^h v^2(p^{2/3}\varphi(t))\,g(t)\,dt,$$

где $g(t)$ — гладкая функция, $h>\zeta_2$, имеет вид

$$J=\frac{1}{2p^{1/3}}\int_0^{\zeta_2}\frac{g(t)\,dt}{\sqrt{-\varphi(t)}}+\frac{Kg(\zeta_2)}{p^{2/3}\varphi'(\zeta_2)}+O(p^{-4/3}), \tag{9}$$

где K — некоторая константа.

Получение асимптотик функций $\eta_{m,1}$ и $A_{m,1}$ проводится в 2 этапа. На 1-м этапе, выделяя с помощью асимптотических формул типа (9) главные при $p\to\infty$ члены асимптотик входящих в (5), (6) выражений, можно получить асимптотику $\psi_{m,1}$, имеющую вид

$$\varepsilon\psi_{m,1}=i\psi_{m,0}[L_m(\zeta,\ \xi)+T_m(\xi)]+O(p^{1/3}\varepsilon), \tag{10}$$

где

$$L_m(\zeta,\xi)=p\varepsilon\mu_m^2\left\{\Phi_m(\zeta,\xi)-\frac{1}{N_m}\int_0^h\Phi_m(t,\xi)f_m^2(t,\xi)\,dt\right\}, \tag{11}$$

$$T_m(\xi)=\frac{p\varepsilon}{2}\int_0^{\tau_m}\frac{\mu_m^2}{N_m}\int_0^h\left(2[2\dot f_m-\gamma_m f_m]f_m\Phi_m-\frac{1}{p^2\mu_m^2}\dot f_m^2\right)dt\,d\tau_m', \tag{12}$$

$$\Phi_m=-\frac{2}{W_m}\int_\zeta^{\zeta_2}\dot f_m\tilde f_m\,dt. \tag{13}$$

На 2-м этапе, подставляя асимптотики функций f_m и $\tilde f_m$ в (11), (12), (13), нетрудно получить асимптотики $L_m(\zeta,\ \xi)$ и $T_m(\xi)$. Обозначим $S_m(\zeta,\ \xi)=\dot\varphi_m(\zeta,\ \xi)/\varphi_m'(\zeta,\ \xi)$, $Q_m(\zeta,\xi)=-\int_\zeta^{\zeta_2}S_m(t,\xi)\,dt$. Тогда

$$L_m(\zeta,\xi)=p\varepsilon\mu_m^2\left\{-Q_m(\zeta,\xi)+\frac{1}{2p^{1/3}N_m}\int_0^{\zeta_2}\frac{Q_m(t,\xi)}{\sqrt{n^2-\mu_m^2}}\,dt\right\}+O(p^{1/3}\varepsilon), \tag{14}$$

$$T_m(\xi)=\frac{p\varepsilon}{2}\int_0^{\tau_m}\frac{\mu_m^2}{p^{1/3}N_m}\int_0^{\zeta_2}\left[\frac{1}{2}S_m^2(t)+2S_m'(t)Q_m(t)+\gamma_mQ_m(t)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\mu_m^2}\dot\varphi_m^2\varphi_m\right]\frac{dt}{\sqrt{n^2-\mu_m^2}}\,d\tau_m'+O(p^{2/3}\varepsilon). \tag{15}$$

Рассмотрим далее случай, когда точка поворота ζ_2 близка к границе волновода: $n_b-\delta_b<\mu_m<n_b+\delta_b$. Здесь асимптотика дисперсионного уравнения имеет вид (7), где

$$\theta(\mu)=\Delta(\mu)-\frac{1}{\pi p}\operatorname{arc\,tg}\frac{v'(\chi)+p^{1/3}\beta v(\chi)}{u'(\chi)+p^{1/3}\beta u(\chi)},\quad \beta=\sqrt{\mu^2-n_h^2}/\varkappa\varphi'(h,\mu),$$
$$\chi=p^{2/3}\varphi(h,\mu).$$

Асимптотика собственной функции f_m при $0\leqslant\zeta\leqslant h$ имеет вид $f_m\sim\frac{1}{\sqrt{\varphi_m'}}\{u(p^{2/3}\varphi_m)\sin\pi p\Delta-v(p^{2/3}\varphi_m)\cos\pi p\Delta\}$, линейно-независимая функ-

ция $\tilde{f}_m$ может быть выбрана в виде

$$\tilde{f}_m \sim \frac{1}{\sqrt{\varphi_m'}}\{u(p^{2/3}\varphi_m)\cos\pi p\Delta + v(p^{2/3}\varphi_m)\sin\pi p\Delta\}.$$

Асимптотика N_m по-прежнему имеет вид (8).

Асимптотика второго приближения метода двухмасштабных разложений выражается формулами (10)—(13). Асимптотики функций $L_m(\zeta, \xi)$ и $T_m(\xi)$, как и раньше, имеют вид (14), (15), но вместо функции Q_m должна быть использована функция

$$\tilde{Q}_m(\zeta, \xi) = -\int_{\zeta}^{\zeta_2}\left[S_m(t, \xi) + \pi p\dot{\Delta}(\mu_m)\frac{1}{\sqrt{n^2-\mu_m^2}}\right]dt.$$

Аналогично можно получить формулы для других вариантов расположения точек поворота относительно границ волновода.

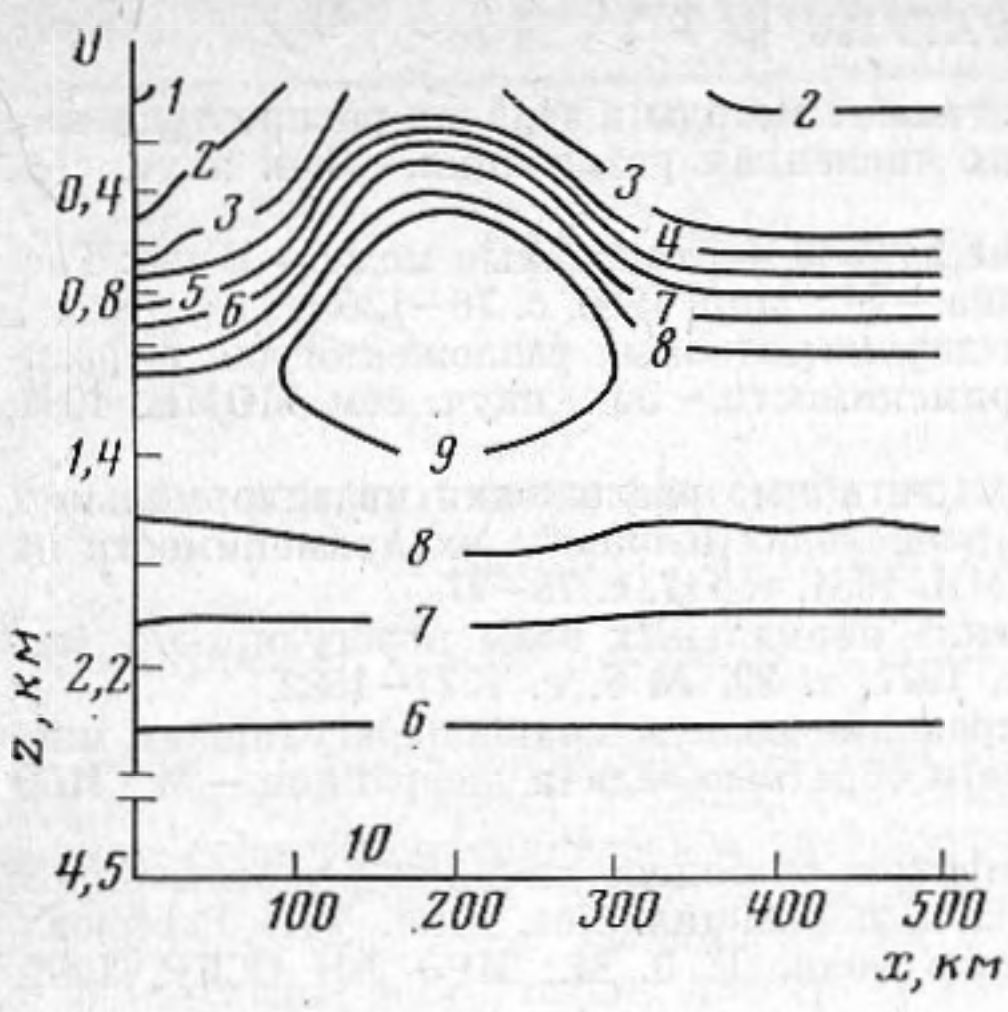
Укажем соответствие между полученными формулами и формулами метода плавных возмущений. Согласно методу двухмасштабных разложений, квазинормальная волна с учетом второго приближения имеет вид $u_m \sim \exp(ip\tau_m/\varepsilon)\psi_{m,0}\{1+i[L_m(\zeta, \xi)+T_m(\xi)]\}$. В методе плавных возмущений

$$u_m \sim e^{-i\frac{p}{\varepsilon}\tau_m}\psi_{m,0}e^{i[L_m(\zeta, \xi)+T_m(\xi)]}. \tag{16}$$

Формула (16) с использованием полученных методом двухмасштабных разложений выражений для функций L_m и T_m была положена в основу программы для ЭВМ БЭСМ-6. По этой программе были проведены расчеты как отдельных квазинормальных волн, так и поля точечного источника в целом для модели океана, изолинии скорости звука в котором приведены на фиг. 1. Были заданы параметры дна: c_h=1,55 км/с; $\varkappa$=1,1. Горизонты источника и приемника полагались равными 0,2 км, частота ν=25 Гц. Вычислялись 32 квазинормальные волны, отвечающие вещественным значениям μ_m. Вертикальные профили скорости звука задавались с шагом 25 км; предполагалось, что при $x>350$ км океан является горизонтально-однородным. Собственные значения μ_m и собственные функции f_m между соседними вертикальными сечениями интерполировались линейно. Для производных по τ_m применялась разностная аппроксимация. Величины δ_s и δ_b выбирались так, чтобы выполнялись условия $|p^{2/3}[2n_s n'(0, \xi)]^{1/3}\zeta_1|<4$ при $|\mu-n_s|<\delta_s$ и $|p^{2/3}[2n_b n'(h, \xi)]^{1/3}(h-\zeta_2)|<4$ при $|\mu-n_b|<\delta_b$.

На фиг. 2, *а* представлена зависимость поправки L_m от m (точки, соответствующие разным m, соединены ломаной линией). Видно, что уже на частоте 25 Гц поправка L_m достигает величины порядка единицы, и, следовательно, адиабатическое приближение неприменимо (величины L_m и T_m пропорциональны частоте ν). На фиг. 2, *б* показана зависимость поправки T_m от m. При $x>350$ км океан горизонтально-однороден и $L_m=0$, т. е. поправка к адиабатическому приближению определяется значением T_m. Поскольку при $x=350$ км $|T_m|<0{,}3$, то при $x>350$ км адиабатическое приближение на частоте 25 Гц еще можно применять.

При расчете поля точечного источника звука учет поправок к адиабатическому приближению приводит к большим изменениям расчетной фазы поля (порядка величин приведенных выше поправок) и значительно меньше отражается на амплитуде поля. Действительно, величина поля в каждой точке определяется вкладом групп соседних нормальных волн, складывающихся в фазе [9]. Но в каждой группе значения L_m и T_m отличаются мало и учет их не нарушает условия синфазности. На более высоких частотах, где велики отличия поправок для различных групп волн, учет поправок приводит к заметному изменению картины интерференции между этими группами. Это иллюстрируется фиг. 3, где показан горизон-

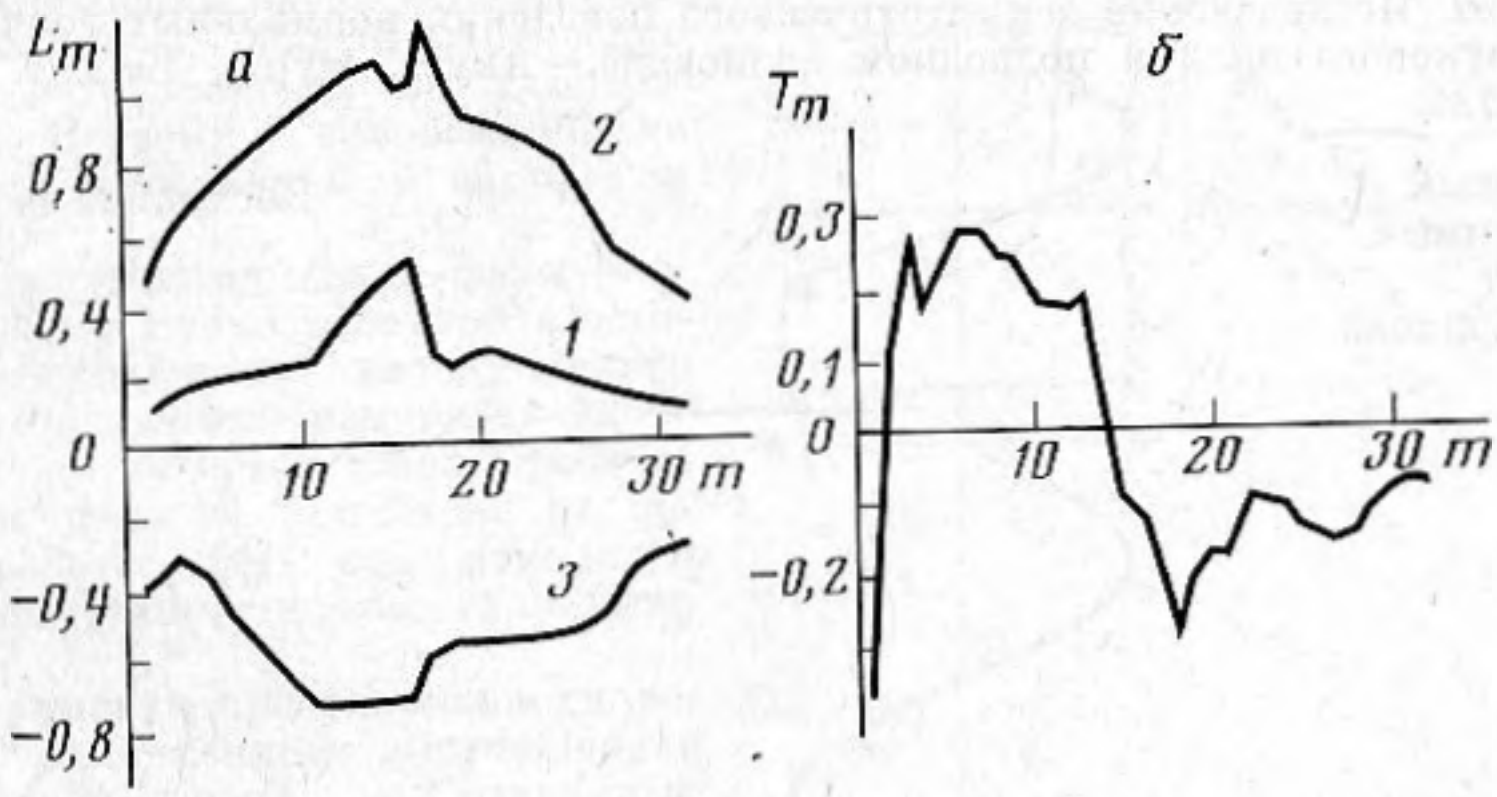


Фиг. 1

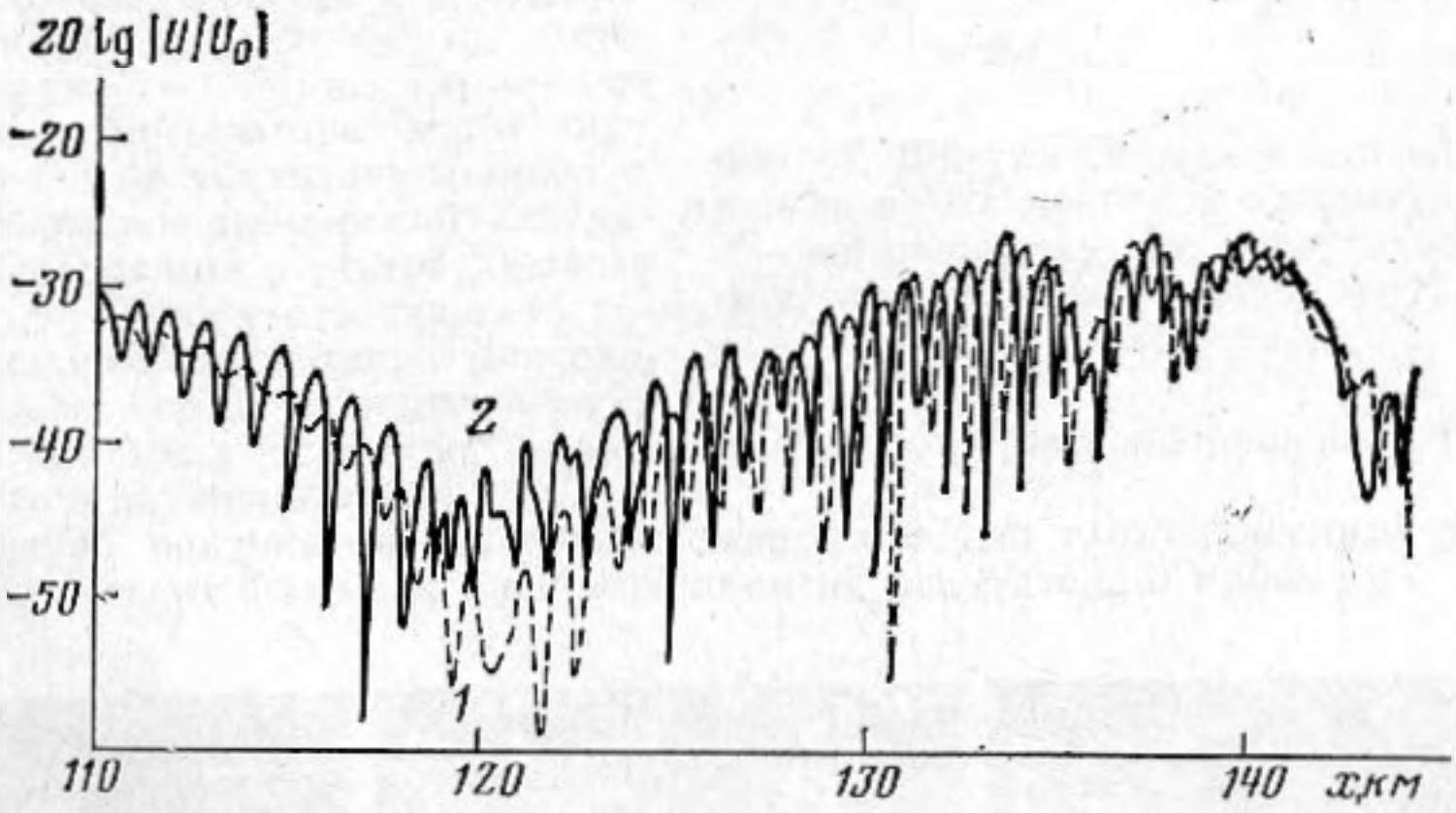
Фиг. 1. Изолинии скорости звука в горизонтально-неоднородном океане. *1* – 1,527 км/с, *2* – 1,525, *3* – 1,520, *4* – 1,515, *5* – 1,510, *6* – 1,505, *7* – 1,5, *8* – 1,495, *9* – 1,490, *10* – 1,5345 км/с

Фиг. 2. *а* – Зависимость L_m от номера нормальной волны. *1* – x=25 км, *2* – x=100, *3* – x=275 км; *б* – зависимость T_m от номера нормальной волны при x=350 км

Фиг. 3. Горизонтальный разрез амплитуды поля точечного источника на частоте 200 Гц. *1* – адиабатическое приближение, *2* – с учетом поправок



Фиг. 2



Фиг. 3

тальный разрез поля на частоте 200 Гц (горизонты источника и приемника 0,1 км) в адиабатическом приближении и с учетом поправок.

Время расчета поля точечного источника с учетом поправок к адиабатическому приближению при ν=25 Гц составляет 6 мин (в адиабатическом приближении – около 1 мин).

Автор благодарен В. С. Булдыреву за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булдырев В. С., Буслаев В. С.* Асимптотические методы в задачах распространения звука в океанических волноводах и их численная реализация.— Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1981, т. 117, с. 39—77.
2. *Барридж Р., Вейнберг Г.* Горизонтальные лучи и вертикальные моды.— В кн.: Распространение волн и подводная акустика.— М.: Мир, 1980, с. 76—125.
3. *Булдырев В. С., Григорьева Н. С.* Метод двухмасштабных разложений для рефракционных волноводов и условия его применимости.— Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1981, т. 104, с. 33—48.
4. *Булдырев В. С., Григорьева Н. С.* Двухмасштабные разложения квазинормальных волн в нерегулярных рефракционных волноводах и оценка их применимости на высоких частотах.— Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1981, т. 117, с. 78—97.
5. *Попов А. В.* Коротковолновая асимптотика нормальных волн нерегулярного волновода.— Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 8, с. 1577—1582.
6. *Боровиков В. А., Попов А. В.* Распространение волн в плавнонерегулярных многомодовых волноводах.— В кн.: Прямые и обратные задачи дифракции.— М.: ИРЭ АН СССР, 1979, с. 167—266.
7. *Суханов В. В.* Нормальные волны в широком слабонерегулярном рефракционном волноводе с границами.— В кн.: Волны и дифракция. Тез. докл. VIII Всесоюзн. симп. по дифракции и распространению волн. Т. 3. М.: ИРЭ АН СССР, 1981, с. 186—189.
8. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
9. *Явор М. И.* Исследование асимптотического поведения нормальных волн при расчете звукового поля в подводном волноводе.— Акуст. журн., 1982, т. 28, № 1, с. 120—124.

Ленинградский
государственный
университет
им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию
28.VI.1983