

УДК 534.26

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ НА НЕОДНОРОДНОСТЯХ ВИБРОПРОВОДА И ОЦЕНКА АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПАДЕНИИ НА НИХ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ИЗГИБА

Иванов В. С.

В дополнение к силе и моменту предлагается ввести понятия об усилиях, пропорциональных скачкам угла поворота и прогиба. Устанавливается связь между виброизоляционными свойствами препятствия и возникающими в вибропроводе усилиями, предлагаются приближенные решения для акустического излучения в низкочастотной области.

Излучение звука пластинами и оболочками в области частот, значительно более низких, чем частоты совпадения (или критические), определяется главным образом действующими на них силами и моментами ([1-4] и др.). Известно также, что неоднородности (препятствия) на вибропроводе переводят неизлучающие в докритической области частот компоненты вибраций в излучающие. Заменяя действие препятствий на вибропровод усилиями, возможно определить излучающую способность той или иной неоднородности. Именно так оказывается, например, возможным получение решения сложной задачи об излучении пластин, подкрепленных периодическим набором ребер [5, 6].

В рамках элементарной теории изгиба влияние любых граничных условий можно заменить действием четырех усилий и при их наличии рассматривать вибропровод как бесконечно длинный (граничные условия отсутствуют). При этом уравнение колебаний будет иметь вид

$$w^{IV} - k_n^4 w = \frac{1}{B} [F\delta(x-x_0) + M\delta'(x-x_0) + C\delta''(x-x_0) + D\delta'''(x-x_0)]. \quad (1)$$

Здесь штрихи означают производную по координате x , k_n — волновое число изгибных колебаний в пластине, B — цилиндрическая жесткость пластины $B = Eh^3/12(1-\mu^2)$, F и M — поперечная сила и момент, пропорциональные третьей и второй производной прогиба в точке x_0 — крепления препятствия, а C и D — некие усилия, пропорциональные скачкам угла поворота и прогиба соответственно. Можно физически трактовать усилия C и D как совокупность двух и четырех моментов. Последовательное образование их из изначальной поперечной силы и соответствующая их действию картина деформации пластины приведены на фиг. 1. Если представить себе, что промежутки между элементарными силами стремятся к нулю, то видно, что C приводит к излому упругой линии, а D — к ее разрыву. Существенно отметить, что в отличие от F и M усилия C и D являются самоуравновешенными. Размерности усилий C и D равны произведению размерности силы на первую и вторую степень размерности длины (для пластины) или на вторую и третью степень размерности длины (для стержня). Очевидно, что комбинацией четырех усилий можно сформулировать любые граничные условия. Например, жесткая неподвижная заделка соответствует $F \neq 0$, $M \neq 0$, $C = 0$, $D = 0$; свободный конец, наоборот, $F = 0$, $M = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$; сосредоточенная масса (упругость) в середине вибропровода $F \neq 0$, $M \neq 0$, $C = 0$, $D = 0$ (нет скачков угла поворота и прогиба), а масса на его конце $F \neq 0$, $M \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$.

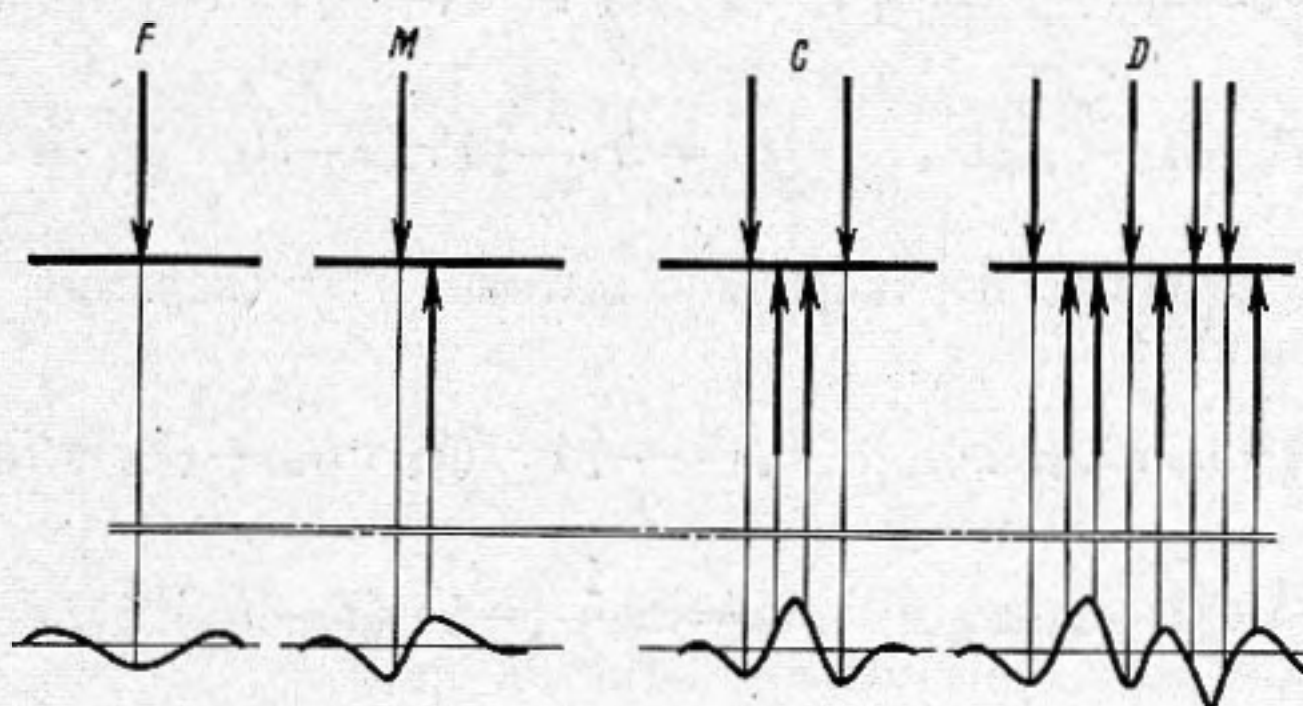
Решением уравнения (1) является

$$w = -\frac{F}{4Bk_n^3} [ie^{\mp ik_n(x-x_0)} + e^{\mp ik_n(x-x_0)}] \mp \frac{M}{4Bk_n^2} [e^{\mp ik_n(x-x_0)} - e^{\mp ik_n(x-x_0)}] +$$

$$+ \frac{C}{4Bk_n} [ie^{\mp ik_n(x-x_0)} - e^{\mp k_n(x-x_0)}] \pm \frac{D}{4R} [e^{\mp ik_n(x-x_0)} + e^{\mp k_n(x-x_0)}]. \quad (2)$$

Для $x-x_0 > 0$, т. е. справа от сечения, в котором приложены усилия, принимаются верхние знаки, а для $x-x_0 < 0$ — нижние.

В качестве примера определим усилие C , возникающее при прохождении однородной изгибной волны $e^{-ik_n x}$ единичной амплитуды через под-



Фиг. 1. Деформации стержня при действии усилий F , M , C и D

вижный шарнир при $x_0=0$ (в этом случае $F=M=D=0$, так как имеет место лишь излом упругой линии). В шарнире равен нулю изгибающий момент

$$(e^{-ik_n x})''_{x=0} + w''|_{x=0} = -1 - \frac{C}{4Bk_n}(1+i) = 0,$$

$$C = -4Bk_n/(1+i).$$

От шарнира вправо $x > 0$ распространяются волны, вызванные усилием C плюс первоначально падающая волна $e^{-ik_n x}$ (см. (2))

$$w_c = e^{-ik_n x} - \frac{1}{1+i}(ie^{-ik_n x} - e^{-k_n x}),$$

откуда определяются коэффициенты прохождения через шарнир $T = 1/(1+i)$, $T' = 1/(1+i)$, а влево распространяется $x < 0$ волна $w = -1/(1+i)$, $(ie^{ik_n x} - e^{k_n x})$, откуда коэффициенты отражения будут $R = -i/(1+i)$, $R' = 1/(1+i)$ (штрих означает, что данная величина является коэффициентом при неоднородной волне).

Аналогично можно рассмотреть и взаимодействие с шарниром неоднородной волны изгиба $e^{-k_n x}$. В этом случае $C = 4Bk_n/(1+i)$, $T_n = i/(1+i)$, $T'_n = i/(1+i)$, $R_n = i/(1+i)$, $R'_n = -1/(1+i)$. Заметим, что, используя понятие об усилии C , можно обойтись решением одного уравнения вместо четырех ($w''=0$ и непрерывность остальных производных прогиба) так же, как использование обычного понятия силы позволяет решать задачу аналогичным способом в случае, если вибропровод подперт ($w=0$).

Пользуясь (2), можно построить общие зависимости между коэффициентами прохождения и отражения и усилиями, возникающими в точке крепления препятствия.

Предварительно обозначим:

$$F_0 = \frac{F}{4Bk_n^3}; \quad M_0 = \frac{M}{4Bk_n^2}; \quad C_0 = \frac{C}{4Bk_n}; \quad D_0 = \frac{D}{4B} \quad (3)$$

Хотя эти величины имеют размерности длины, в дальнейшем будем считать их безразмерными, так как амплитуду падающей волны примем за единицу той же размерности длины, которая принята при решении задачи.

Из (2) в случае падения однородной волны на препятствие слева направо $e^{-ik_n x}$ (верхние знаки) или справа налево $e^{ik_n x}$ (нижние знаки)

следует:

$$\begin{aligned}
 T &= 1 - iF_0 \mp M_0 + iC_0 \pm D_0, & F_0 &= \frac{1}{4}[-i + i(T+R) - (T'+R')] \\
 T' &= -F_0 \pm M_0 - C_0 \pm D_0, & M_0 &= \pm \frac{1}{4}[1 - (T-R) + (T'-R')] \\
 R &= -iF_0 \pm M_0 + iC_0 \mp D_0, & C_0 &= \frac{1}{4}[i - i(T+R) - (T'+R')] \\
 R' &= -F_0 \mp M_0 - C_0 \mp D_0, & D_0 &= \pm \frac{1}{4}[1 + (T-R) + (T'-R')],
 \end{aligned} \tag{4}$$

а при взаимодействии с неоднородной волной $e^{-k_n x}$ (верхние знаки) или $e^{k_n x}$ (нижние знаки):

$$\begin{aligned}
 T_n &= -iF_0 \mp M_0 + iC_0 \pm D_0, & F_0 &= \frac{1}{4}[1 + i(T_n + R_n) - (T_n' + R_n')] \\
 T_n' &= 1 - F_0 \pm M_0 - C_0 \pm D_0, & M_0 &= \pm \frac{1}{4}[-1 - (T_n - R_n) + (T_n' - R_n')] \\
 R_n &= -iF_0 \pm M_0 + iC_0 \mp D_0, & C_0 &= \frac{1}{4}[1 - i(T_n + R_n) - (T_n' + R_n')] \\
 R_n' &= -F_0 \mp M_0 - C_0 \mp D_0, & D_0 &= \pm \frac{1}{4}[-1 + (T_n - R_n) + (T_n' - R_n')].
 \end{aligned} \tag{5}$$

Несимметричными по отношению к направлению движения волны являются M_0 и D_0 .

Зависимости (4) и (5) дают возможность определить силы и по ним оценить акустическое излучение от неоднородности, если известны коэффициенты прохождения и отражения. Для некоторых препятствий весьма трудно бывает теоретически сформулировать граничные условия. В этом случае в формулах (4) и (5) могут быть использованы экспериментально найденные характеристики виброизоляции этих препятствий.

В общем случае определение усилий на стыке с неоднородностью требует решения системы из четырех уравнений, описывающих равенство в контактной точке всех производных перемещения

$$\begin{aligned}
 w_{0,пл}^{(n)} + f_{n,пл} F_{пл} + m_{n,пл} M_{пл} + c_{n,пл} C_{пл} + d_{n,пл} D_{пл} = \\
 = w_{0,р}^{(n)} + f_{n,р} F_{р} + m_{n,р} M_{р} + c_{n,р} C_{р} + d_{n,р} D_{р},
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $n=0, 1, 2, 3$; значок (n) — n -я производная; индексы пл и р относятся к вибропроводу (пластина) и препятствию (ребро) соответственно; w_0 — амплитуда падающей волны; f_n , m_n и т. д. обозначают безразмерные коэффициенты пропорциональности между n -ми производными смещений и соответствующими усилиями.

Система (6) симметрична по отношению к значкам пл и р, т. е. предполагается, что и вибропровод и препятствие равноправны, и безразлично, что за что принимать (например, случай пересекающихся пластин).

Для дальнейшего ограничимся случаями, когда неоднородность имеет характер препятствия с сосредоточенными параметрами. Полагая $F_{пл} = -F_{р}$, $M_{пл} = -M_{р}$ и т. д., а также $w_{0,р} = 0$ перепишем для этого случая (6), используя обозначения (3):

$$\begin{aligned}
 F_{0,пл} \left(f_{n,пл} + \frac{4Bk_n^3}{k_n^n} f_{n,р} \right) + M_{0,пл} \left(m_{n,пл} + \frac{4Bk_n^2}{k_n^n} m_{n,р} \right) + \\
 + C_{0,пл} \left(c_{n,пл} + \frac{4Bk_n}{k_n^n} c_{n,р} \right) + D_{0,пл} \left(d_{n,пл} + \frac{4B}{k_n^n} d_{n,р} \right) = - \frac{w_{0,пл}^{(n)}}{k_n^n},
 \end{aligned} \tag{7}$$

где коэффициенты $f_{n,пл}$, $m_{n,пл}$ и т. д. определяются из решения (2) и имеют

Таблица 1

n	$f_{n, пл}$	$m_{n, пл}$	$c_{n, пл}$	$d_{n, пл}$
0	$-(1+i)$	0	$-(1-i)$	$-2/2$
1	0	$-(1-i)$	$-2/2$	$-(1+i)$
2	$-(1-i)$	$-2/2$	$-(1+i)$	0
3	$-2/2$	$-(1+i)$	0	$-(1-i)$

Таблица 2

n	$e^{-ik_{п}x}$	$e^{ik_{п}x}$	$e^{-k_{п}x}$	$e^{k_{п}x}$
0	-1	-1	-1	-1
1	-1	-i	1	-1
2	1	1	-1	-1
3	-i	i	1	-1

вид (табл. 1). Члены обратной диагонали матрицы табл. 1 — разрывные, верхние значения соответствуют приближению к точке приложения усилия справа со стороны значений $x-x_0 > 0$, а нижние значения — со стороны $x-x_0 < 0$.

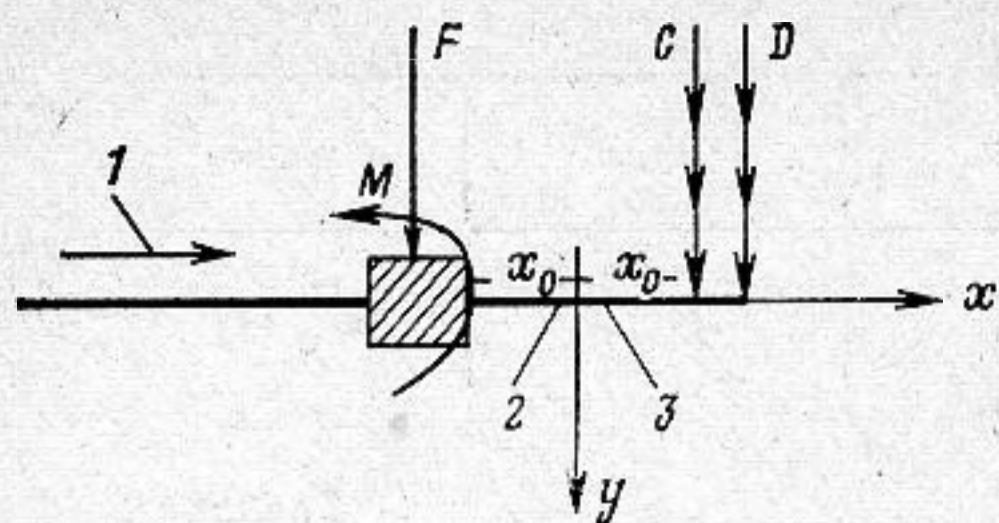
Матрицы — столбцы правой части системы (7) — имеют вид (табл. 2), зависящий от вида волны, взаимодействующей с препятствием (знак минус в правой части учтен в табл. 2).

Заметим, что для выбора знаков разрывных членов табл. 1, особенно в случаях, когда в одном сечении их несколько, требуется более детальное рассмотрение условий их воздействия на вибропровод. Например, рассматривая сложный случай сосредоточенного препятствия на конце стержня, имеем все четыре усилия. Тогда, представляя эти граничные условия в виде изображенных на фиг. 2 соответствующих физическим условиям крепления препятствия, видим, что для рассматриваемой геометрии задачи приближение усилий M и F к $x=0$ (при $x_0 \rightarrow 0$) происходит со стороны значений $x-x_0 > 0$, а усилий C и D — со стороны значений $x-x_0 < 0$.

Следовательно, в системе (7) необходимо принять для F и M верхние значения, т. е. $+2$ (табл. 1), а для C и D — с обратным знаком (нижние значения). При рассмотрении падения волны справа налево ($e^{ik_{п}x}$) и сохранении координатной системы будем иметь обратную картину знаков разрывных коэффициентов. Такая особенность системы (7) позволяет, например, получать разные решения для систем, изображенных на фиг. 3 (шарнир слева и справа от массы).

Количество уравнений в системе (7) определяется количеством усилий, действующих в сечении, где крепится препятствие или имеет место нарушение однородности вибропровода. Например, фиг. 2 соответствует наличию всех четырех усилий, фиг. 3 — трех ($D=0$, нет разрыва упругой линии). Выбор уравнений системы осуществляется из условий на границе с препятствием. При ограничении прогиба используется первое уравнение системы (определяется усилие F), при ограничении угла поворота — второе уравнение (определяется момент M), при ограничении второй производной — третье уравнение (усилие C) и при ограничении третьей производной — четвертое уравнение (усилие D).

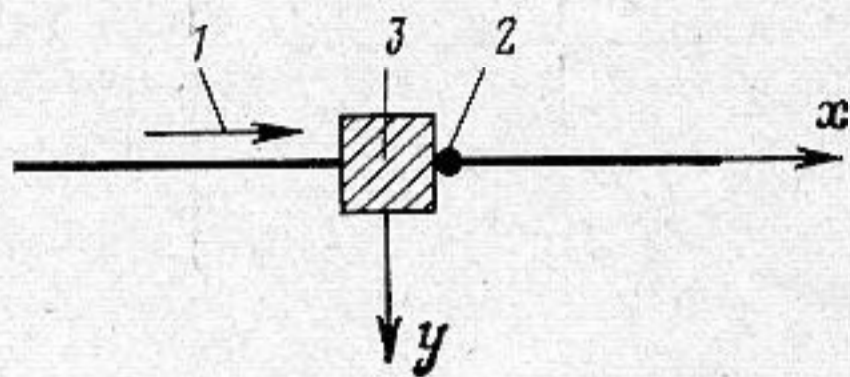
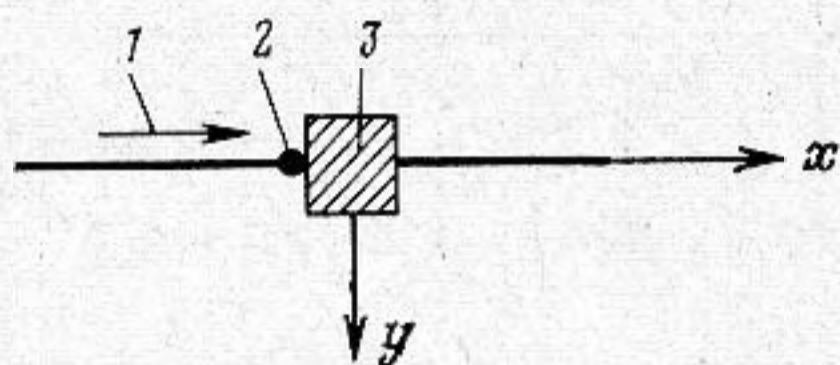
Коэффициенты $f_{n,p}$, $m_{n,p}$ и т. д. в системе (7) равны отношению перемещения (или его производной) к усилию, его вызывающему, определенные в координатных осях, принятых для вибропровода. Например, для несимметричного относительно оси пластины препятствия массой m_p таблица коэффициентов $f_{n,p}$, $m_{n,p}$ имеет вид (табл. 3). Здесь x_T , y_T — координаты центра тяжести, $r_n^2 = r_{0п}^2 + y_T^2$, $r_{0п}$ — радиус инерции препятствия, ω — угловая частота. Разные знаки у членов, симметричных относительно главной диагонали, объясняются несовпадением положительных направлений у момента (плюс против часовой стрелки) и угла поворота (плюс по часовой стрелке). Заметим, что коэффициенты $c_{n,p}$ и $d_{n,p}$ равны нулю,



Фиг. 2

Фиг. 2. К определению знаков разрывных коэффициентов табл. 1. 1 — падающая волна e^{-ikx} , 2 — область значений $x-x_0 > 0$, 3 — область значений $x-x_0 < 0$

Фиг. 3. Пример неоднородностей, отличающихся знаками разрывных коэффициентов в табл. 1. 1 — падающая волна e^{-ikx} , 2 — шарнир, 3 — виброизолирующая масса



Фиг. 3

так как усилия C и D самоуравновешенные и не воздействуют на препятствие.

Как уже указывалось, при решении задачи для стержня с массой на конце система (7) состоит из четырех уравнений. Если же масса внутри стержня, то система будет состоять из двух уравнений и тогда в табл. 3 будут только две верхние строки. В случае, изображенном на фиг. 3, — три строки.

Предложенный метод решения задачи виброизоляции имеет то преимущество, что опирается на каноническую систему уравнений в виде (6) или (7) и позволяет определять усилия, вызываемые неоднородностями. Если эти системы дополнить двумя уравнениями (и соответствующими членами каждое из уравнений), описывающими равенство продольных перемещений и ее первую производную (с соответствующими усилиями, то получим систему, позволяющую определять усилия и характеристики виброизоляции для препятствий, преобразующих поперечные изгибные волны в продольные и наоборот.

Понятно, что использовать предложенный метод можно и в случае приложения внешних усилий к вибропроводу. Надо рассмотреть задачу применительно к однородным и неоднородным волнам, порожденным внешним усилием.

Знание усилий, возникающих в вибропроводе на неоднородностях, позволяет построить приближенные решения задач об их акустическом излучении в области низких частот (при $m\omega/\rho c \ll 1$). Тогда излучение силы в дальнем поле представляется диполем, момента — квадруполем (производной по x от диполя), усилий C и D — второй и третьей производных от диполя по x (см. правую часть уравнения (1)):

$$p_F(R, \theta) = \frac{kFe^{-ikR}}{2\sqrt{\pi kR}}(1+i)\cos\theta, \quad p_M(R, \theta) = -\frac{k^2Me^{-ikR}}{2\sqrt{\pi kR}}(1-i)\cos\theta\sin\theta, \quad (8)$$

$$p_C(R, \theta) = -\frac{k^3Ce^{-ikR}}{2\sqrt{\pi kR}}(1+i)\cos\theta\sin^2\theta, \quad p_D(R, \theta) = \frac{k^4De^{-ikR}}{2\sqrt{\pi kR}}(1-i)\cos\theta\sin^3\theta.$$

Здесь k — волновое число в жидкости, θ — угол, отсчитываемый от оси y .

При использовании этих зависимостей для случая излучения в тяжелую среду (вода) волновое число изгибных колебаний в пластине k_n необходимо принимать с учетом реакции среды, используя, например, приведенные в [7] таблицы корней характеристического уравнения задачи. В этом случае погрешность использования формул (8) в очень широком диапазоне частот (ниже частот совпадения в 5 раз и более) не приводит

n	$f_{n,p}$	$m_{n,p}$	$c_{n,p}$	$d_{n,p}$
0	$1 + \frac{x_T^2}{r_n^2}$ $-\frac{m_p \omega^2}{m_p \omega^2}$	$-\frac{x_T}{m_p r_0^2 \omega^2}$	0	0
1	$\frac{x_T}{m_p r_n^2 \omega^2}$	$\frac{1}{m_p r_n^2 \omega^2}$	0	0
2	0	0	0	0
3	0		0	0

к погрешности более 12–15%. Эта погрешность противоположна по знаку погрешности от пренебрежения членом $m\omega/rc$ по сравнению с 1.

Возможность использования решений системы (7) и зависимостей (8) для низкочастотной области проведена по точным решениям задачи об излучении одиночного ребра жесткости [8], T-образного соединения пластин [9], трещины [10] и др.

Из (8) видно, почему наибольшее излучение имеет место при отражении изгибной волны от жесткой заделки (излучения силы и момента пропорциональны первой и второй степеням волнового числа в жидкости, малого на низких частотах), а наименьшей излучающей способностью обладает свободный край пластины (излучения C и D пропорциональны третьей и четвертой степеням волнового числа). Свободно опертый край занимает промежуточное положение. Заметим, что отражение вибрационной энергии во всех случаях полное. Таким образом, связь между виброизоляцией препятствий и его излучением в среду неоднозначная. Однако если рассматривать препятствие одного вида, например опору, то увеличение импеданса опоры увеличивает отражение изгибной волны и возникающую на ней силу, а следовательно, и излученное в среду давление.

Пользуясь принципом независимости действия сил, можно представить акустическое излучение от места присоединения препятствия в сложном случае при действии нескольких сил. Например, для массы на конце пластины имеет место излучение всех четырех видов зависимости (8).

Здесь рассмотрены плоские задачи. Однако поскольку на низких частотах излучают лишь волны, нормально (или почти нормально) падающие на препятствие, то предложенные зависимости достаточно хорошо характеризуют излучающую способность реальных неоднородностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутин Л. Я. Звуковое излучение бесконечной пластинки, возбуждаемой нормальной к ней сосредоточенной силой. — Акуст. журн., 1964, т. 10, № 4, с. 431–434.
2. Feit D. Pressure radiated by point elastic plate. — J. Acoust. Soc. Amer., 1966, v. 40, № 6, p. 1489–1495.
3. Иванов В. С., Романов В. Н. К вопросу определения звукового давления вблизи поверхности бесконечной пластины, возбуждаемой сосредоточенной силой. — Акуст. журн., 1970, т. 16, № 4, с. 526–529.
4. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972.
5. Евсеев В. Н. Излучение звука бесконечной пластины с периодическими неоднородностями. — Акуст. журн., 1973, т. 19, № 3, с. 345–351.
6. Mace B. R. Sound radiation from fluid loaded orthogonally stiffened plates. — J. of Sound and Vibration., 1981, v. 79, № 3, p. 439–452.
7. Ляпунов В. Т., Никифоров А. С. Виброизоляция в судовых конструкциях. Л.: Судостроение, 1975.
8. Романов В. Н. Звукоизлучение бесконечной пластины с ребром жесткости, возбуждаемой сосредоточенной силой. — Докл. Всесоюз. акуст. конф. М.: Изд-во АН СССР, 1973.
9. Романов В. Н. Излучение T-образного соединения пластин при возбуждении его сосредоточенной силой. — Акуст. журн., 1973, т. 29, № 2, с. 216–220.
10. Коузов Д. П. Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 6, с. 1037–1043.

Поступила в редакцию
9.VII.1984