6. *Chettopadhyay A., Mahata N. P.* Propagation of Love waves on a cylindrical earth model.— J. Acoust. Soc. Amer., 1983, v. 74, № 1, p. 286–293.
7. *Cabayan H. S., Murphy R. C.* Scattering of electromagnetic waves by rough perfectly conducting circular cylinders.– IEEE Trans., 1973, v. AP-21, № 6, p. 893–895.
8. *Курьянов Б. Ф.* Рассеяние звука на шероховатой поверхности с двумя шипами неровностей.– Акуст. журн., 1962, т. 8, № 3, с. 325–333.
9. *Mitzner K. M.* Effect of small irregularities on electromagnetic scattering from an interface of arbitrary shape.– J. Math. Phys., 1964, v. 5, № 12, p. 1776–1786.
10. *Euges Y., Nelson A.* Perturbation theory of scattering from irregular bodies.– Ann. Phys. (USA), 1976, v. 100, № 1–2, p. 37–61.
11. *Hayre H. S., Vroulis G.* Determination of microscale roughness cylindrical surface using ultrasonic creeping waves. Institute of Electrical and Electronics Engineers. N. Y.: Southwestern conf. 21-st. San Antonio (Tex.), 1969, p. 18D/1–18D/4.
12. *Watson J. G., Keller J. B.* Reflection, scattering and absorption of acoustic waves by rough surfaces.– J. Acoust. Soc. Amer., 1983, v. 74, № 6, p. 1887–1894.
13. *Хенл Х., Мауэ А., Вестифаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
14. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
2.VIII.1984

УДК 534.232

АКУСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УЗКОПОЛОСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ДВИЖУЩИХСЯ ИСТОЧНИКОВ

Хоха Ю. В.

Исследование многих вопросов аэрогидродинамической акустики существенно упрощается, если заменить излучающее тело эквивалентной системой распределенных соответствующим образом элементарных источников. Таково, например, известное решение задачи о звуковом поле вращающегося воздушного винта, полученное Гутиным, который действие лопастей на среду свел по существу к специально подобранному распределению источников нулевого и первого порядков.

Ниже с использованием этого приема рассмотрен общий вопрос о совместном влиянии конечности размеров и неравномерности движения излучающего тела на амплитуду и мгновенную частоту звукового давления. Учет конечности размеров тела выполнен на основе принципа суперпозиции с помощью потенциала Лиенара – Вихерта. Описание мгновенных характеристик звукового давления получено с использованием представления об аналитическом сигнале, для которого понятия амплитуды (огибающей), фазы и мгновенной частоты строго определены.

В качестве модели тела примем область конечных размеров с распределенными в ней узкополосными источниками нулевого порядка, движущуюся поступательно в безграничной среде. Считаем объемные скорости каждого элементарного источника системы не зависящими от действия остальных и от движения области T', а последнюю – гидродинамически прозрачной (модель проницаемого тела).

Звуковое поле движущегося точечного источника определяется [1] потенциалом Лиенара – Вихерта

$$d\varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{dQ(t')}{4\pi r(t')\left\{1 - \frac{1}{c}\mathbf{u}(t')\mathbf{n}(t')\right\}},$$

где $\mathbf{x}$ – неподвижная точка наблюдения, $r(t') = |\mathbf{x} - \mathbf{y}(t')|$, $\mathbf{y}(t')$ – положение, а $\mathbf{u}(t) = d\mathbf{y}(t')/dt'$ – скорость источника, $t' = t - r(t')/c$, $\mathbf{n}(t') = \mathbf{r}(t')/r(t)$, $dQ(t)$ – зависимость объемной скорости от времени в собственной системе, c – скорость распространения звука. Для нахождения поля, создаваемого всей областью T', выберем внутри T' некоторую точку O' и примем ее за начало движущейся системы координат с осями, параллельными осям неподвижной, в которой среда покоится на бесконечности. Тогда уравнение движения произвольной точки T' запишется как $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) - \mathbf{z}$, где $\mathbf{Y}(t)$ – уравнение движения полюса O', а $\mathbf{z}$ – положение той же точки относительно движущейся системы отсчета. Учитывая, что $dQ(t') = dQ(\mathbf{z}, t') = q(\mathbf{z}, t)d\tau(\mathbf{z})$, где q – плотность объемной скорости, а $d\tau$ – элемент объема в точке $\mathbf{z} \in T'$, воспользуемся принципом суперпозиции. Тогда

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = -\int\limits_{T'} \frac{q(\mathbf{z}, t')d\tau(\mathbf{z})}{4\pi r(\mathbf{z}, t')\{1 - M(\mathbf{z}, t')\mathbf{n}(\mathbf{z}, t')\}}, \tag{1}$$

где

$$r(\mathbf{z},t)=|\mathbf{x}-\mathbf{Y}(t)-\mathbf{z}|,\qquad t=t-\frac{r(\mathbf{z},t')}{c},\qquad \mathbf{M}(\mathbf{z},t)=\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{y}(\mathbf{z},t)}{dt'}\quad \text{и т. д.}$$

Каждой точке $\mathbf{z}\in T'$ поставим в соответствие аналитический сигнал [2], образованный физическим $q(\mathbf{z},t)$ и сопряженным ему по Гильберту $\hat{q}(\mathbf{z},t)$, который в случае узкополосного источника приводится к виду $q_a(\mathbf{z},t)=q_\psi(\mathbf{z},t)e^{i\omega_0 t}$, где $q_\psi(\mathbf{z},t)=q_0(\mathbf{z},t)e^{i\omega(\mathbf{z},t)}$ – медленно меняющаяся во времени комплексная огибающая аналитического сигнала, ω_0 – единая для всей области T' постоянная составляющая мгновенной частоты, $\psi(\mathbf{z},t)$ – составляющая фазы, не содержащая слагаемого, линейно зависящего от времени. Заменим в (1) физический сигнал аналитическим. Тогда потенциал звукового поля (1) можно рассматривать как действительную часть комплексного $\varphi_0(\mathbf{x},t)$, для которого будем искать асимптотически простое представление, соответствующее дальнему полю, в предположении, что T' движется поступательно, так что $\mathbf{z}=\text{const}$ и $\mathbf{M}(\mathbf{z},t')=\mathbf{M}(t')=\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{Y}(t')}{dt'}$.

Разложим в ряд Тейлора по малой величине $\mathbf{z}$ функцию $r(\mathbf{z})$, принимая во внимание, что она зависит от $\mathbf{z}$ как непосредственно, т. е. через $\mathbf{r}$, так и через время запаздывания $t'=t-r(\mathbf{z},t')/c$, как неявную функцию $\mathbf{r}$ и t:

$$r(\mathbf{z})=r|_{\mathbf{z}}-\left[(\mathbf{z}\nabla_x)+\mathbf{z}\nabla_x t_0'\frac{\partial}{\partial t_0}\right]r|_{z=0}+\frac{1}{2!}\left[(\mathbf{z}\nabla_x)+\mathbf{z}\nabla_x t_0\frac{\partial}{\partial t_0}\right]^2 r|_{z=0}+\ldots\approx$$

$$\approx r_0-\frac{\mathbf{zn}}{1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0}-\frac{1}{2}\frac{(\mathbf{zn}_0)^2\dot{\mathbf{M}}_0\mathbf{n}_0}{c(1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0)^3}+0\left(\frac{1}{r}\right)+0(\dot{\mathbf{M}})^2+0\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\mathbf{M}\right),\tag{2}$$

где индекс ноль показывает, что соответствующие величины берутся в момент времени $t_0'=t'|_{z=0}$.

Пусть l – порядок линейных размеров T'. Будем считать, что $r_0\gg l/(1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0)$, т. е. точка наблюдения находится на расстояниях, больших по сравнению с размерами T' и тем расстоянием, которое она проходит со скоростью $c\mathbf{M}$ за время $\sim l/c$; $\frac{l}{c}\frac{\dot{M}_0}{1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0}\ll 1$, т. е. скорость перемещения T' мало меняется за время $\sim l/c$. В указанном приближении величины r и $(1-\mathbf{Mn})$ мало меняются внутри T' и мало отличаются от тех, которым они равны при $\mathbf{z}=0$. Поэтому множитель $\{r(1-\mathbf{Mn})\}^{-1}$ можно вынести за знак интеграла как не зависящий от переменной интегрирования $\mathbf{z}$ и равный $\{r_0(1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0)\}^{-1}$. Допустим еще, что комплексная огибающая мало меняется за собственное время запаздывания системы $\sim l/c$, а элементарные источники T' когерентны, вследствие чего $q_\psi(z,t')\approx q_\psi(\mathbf{z},t_0')=q_\psi(\mathbf{z})Q_0(t_0')$. В фазе же, поскольку для нее существенны не относительные, а абсолютные ошибки, используя (2), можно положить $t'=t_0'+\mathbf{zn}'(1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0)$, если только $k_0l^2/[r_0(1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0)]\ll 1$ и $l_2M_0k_0/[c(1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0)^3]\ll 1$. Первое неравенство обобщает обычное условие дифракции Фраунгофера на случай движения источника, второе – устанавливает ограничение на допустимую величину ускорения излучателя $c\dot{\mathbf{M}}$ при заданных l и k_0.

В результате для комплексного потенциала из (1) получим

$$\varphi_0(\mathbf{x},t)=-\frac{Qe^{i\omega_0 t_0'}}{4\pi r_0(1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0)}Q^T(\mathbf{N}_0),\tag{3}$$

где

$$\mathbf{N}_0=\mathbf{n}_0/(1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0),\qquad \text{а}\qquad Q^{(T)}(\mathbf{N}_0)=\int q_\psi(\mathbf{z})e^{ik_0\mathbf{N}_0\mathbf{z}}\,d\tau(\mathbf{z})$$

и определяет направленные свойства излучения T', обусловленные конфигурацией системы и характером распределения в ней элементарных источников по амплитудам и фазам с учетом эффекта движения системы.

Для нахождения обычно регистрируемого в акустических измерениях звукового давления воспользуемся соотношением, вытекающим из линеаризованного уравнения Эйлера [1] при $\mathbf{v}=\nabla\varphi$: $p=-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t_0'}\frac{\partial t_0'}{\partial t}$. Учитывая, что $Q_0(t_0')$ и $Q^{(T)}(N_0)$ являются, вообще говоря, комплексными функциями своих аргументов и могут быть представлены в виде $Q_0Q_\tau^{(T)}=Q_{m0}e^{i\psi_{m0}}R(\mathbf{N}_0)e^{i\varepsilon(N_0)}$, а также пренебрегая в амплитуде величиной $|\dot{Q}_0|$ по сравнению с $|Q_0\omega_0|$ и считая дипольный момент T' равным нулю, из (3) получим в показательной форме

$$p(x,t)=\frac{i\rho Q_{m0}R(\mathbf{N}_0)\mathcal{F}_0}{4\pi r_0(1-\mathbf{M}_0n_0)^2}e^{i(\omega_0t_0'+\psi_{m0}+\varepsilon(\mathbf{N}_0)+\alpha_0)}+O\left(\frac{1}{r_0^2}\right),\tag{4}$$

где $\mathcal{F}_0=\{\omega_0^2+[\dot{M}_0n_0(1-M_0n_0)^{-1}]^2\}^{1/2}$, $\alpha_0=-\operatorname{arctg}\frac{\dot{M}_0n}{\omega_0(1-M_0n_0)}$. Следовательно, уско-

рение системы приводит к появлению в звуковом давлении соответствующего фазового сдвига α_0, зависящего от времени и от частоты несущей ω_0.

Мгновенная частота сигнала в точке наблюдения x, определяемая как полная производная от фазы Φ_0 по времени, будет $\omega(t)=(\partial\Phi_0/\partial t_0')(\partial t_0'/dt)$, причем в соответствии с (4) $\Phi(t_0')=\omega_0 t_0'+\psi_m(t_0')+\varepsilon(\mathbf{N}_0)+\alpha_0$. Используя тензорные обозначения, с точностью до не зависящих от r_0 членов найдем

$$\omega(t)=\frac{1}{1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0}\left\{\omega_0+\dot{\psi}_m+\frac{(\dot{\mathbf{M}}_0\mathbf{n}_0)n_{0i}}{(1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0)^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial N_{0i}}-\frac{\omega_0[(1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0)\ddot{\mathbf{M}}_0\mathbf{n}_0+(\dot{\mathbf{M}}_0\mathbf{n}_0)^2]}{(1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0)^2\omega_0^2+(\dot{\mathbf{M}}_0\mathbf{n}_0)^2}\right\}, \tag{5}$$

где $\omega_0=\mathrm{const}$, а остальные величины с индексом ноль являются функциями t_0', значения которого определяются из уравнения $|\mathbf{x}-\mathbf{Y}(t_0')|=c(t-t_0')$.

Общий множитель $(1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0)^{-1}$, стоящий в (5) перед скобками, определяет допплеровское смещение частоты из-за движения источника. Два первых слагаемых в фигурных скобках представляют мгновенную частоту излучения в собственной системе отсчета, причем $\dot{\psi}_{m0}$ можно интерпретировать как параметр, характеризующий нестабильность излучения. Слагаемое, пропорциональное $\partial\varepsilon/\partial N_{0i}$ и содержащее ускорение, обусловлено деформацией фазовой характеристики направленности $\varepsilon(\mathbf{M}_0,\mathbf{n}_0)$ при изменении скорости системы; оно обращается в ноль, если система обладает фазовым центром, с которым совмещен полюс O'. Последнее слагаемое, зависящее от частоты несущей ω_0, обусловлено неравномерностью движения источника и характеризует вызванную им дополнительную фазовую модуляцию сигнала.

Дифференцируя ν раз по координатам источника под знаком интеграла в выражении для $Q^{(T)}(\mathbf{N}_0)$, входящем в (3), вводя соответствующие плотности мультипольных моментов и повторяя последующие выкладки, легко получить аналогичные (4) выражения для звукового давления через огибающую и фазу для случая, когда в T' распределены источники ν-го порядка. При этом огибающая умножится на фактор $(1-M_{n0})^{-\nu}$, а зависящие от ускорения амплитудный множитель $\mathscr{F}_0$ и фазовый сдвиг α_0 будут иметь вид

$$\mathscr{F}_0^{(\nu)}=\left\{\omega_0^2+\left[\frac{(\nu+1)\dot{\mathbf{M}}_0\mathbf{n}_0}{1-M_0n_0}\right]^2\right\}^{1/2},\qquad \alpha_0^{(\nu)}=-\operatorname{arctg}\frac{(\nu+1)\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0}{\omega_0(1-\mathbf{M}_0\mathbf{n}_0)}. \tag{6}$$

В соответствии с этим, в частности, мгновенная частота также зависит от ν, так что в общем выражении для $\omega^{(\nu)}(t)$ последнее слагаемое в отличие от (5) запишется как

$$-\frac{(\nu+1)\omega_0[(1-M_{n0})\ddot{\mathbf{M}}_0\mathbf{n}_0+(\dot{\mathbf{M}}_0\mathbf{n}_0)^2]}{[\omega_0(1-M_0n_0)]^2+[(\nu+1)\dot{\mathbf{M}}_0\mathbf{n}_0]^2}. \tag{7}$$

Таким образом, из (4)–(7) следует, что сигнал от принимаемого неподвижным гидрофоном движущегося с переменной дозвуковой скоростью узкополосного источника конечных размеров представляет собой процесс с амплитудно-фазовой модуляцией. Параметры этой модуляции, а следовательно, и спектральные характеристики сигнала определяются временной нестабильностью и направленностью излучения, неравномерностью движения системы и порядка элементарных источников.

Применим полученные соотношения к решению задачи о мгновенной частоте сигнала от движущегося со скоростью $\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}+\mathbf{v}\cos(\Omega t+\varphi)$ гармонического точечного источника нулевого порядка. Пусть точка наблюдения расположена в начале координат, а источник, находящийся в момент времени $t=0$ в точке x_0, удаляется от приемника в направлении оси $0x$. Тогда, используя (5), можно показать, что в линейном по $m=v/c$ приближении при $m\ll M$

$$\omega(t)=\frac{\omega_0}{1+M}\left[1-\frac{m}{1+M}\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)\cos(\Omega t'+\varphi)\right]. \tag{8}$$

Входящее сюда время t' определяется уравнением

$$x_0+ut'+\frac{v}{\Omega}\sin(\Omega t'+\varphi)=c(t-t').$$

Считая $1/\Omega\ll t$, методом последовательных приближений найдем

$$t=\frac{t-\dfrac{x_0}{c}}{1+M}-\frac{m}{(1+m)\Omega}\sin\left[\frac{\Omega}{1+M}\left(t-\frac{x_0}{c}\right)+\varphi\right]+O(m^2).$$

Полагая в (8) $\varphi=\dfrac{\Omega}{1+M}\dfrac{x_0}{c}$, окончательно будем иметь

$$\omega(t)=\frac{\omega_0}{1+M}\left[1-\frac{m}{1+M}\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)\cos\frac{\Omega}{1+M}t\right].$$

Следовательно, в рассматриваемом случае принимаемый сигнал характеризуется синусоидальной частотной модуляцией. Так как среднее значение частоты есть $\overline{\omega}=\omega_0/(1+M)$, девиация частоты будет $\Delta\omega=|\omega_{extr}-\overline{\omega}|=m\omega_0(1+\Omega^2/\omega_0^2)/(1+M)^2$. В результате для глубины и индекса модуляции соответственно получим $\gamma=\Delta\omega/\omega=m(1+\Omega^2/\omega_0^2)/(1+M)$, $\beta=\Delta\omega/\Omega_m=m\omega_0(1+\Omega^2/\omega_0^2)/\Omega(1+M)$, где $\Omega_m=\Omega/(1+M)$ – частота модуляции, а $\Omega\ll\omega_m$.

Установленные здесь свойства поля излучения будут иметь место для любых излучающих тел, независимо от их природы и с учетом порядка эквивалентных им источников.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды.– М.: Гостехиздат, 1946.
2. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. Случайные процессы. М.: Наука, 1976.

Поступило в редакцию
8.X.1984