АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXII | АКАДЕМИЯ НАУК СССР | Январь
1986 | | Февраль
Вып. 1

Основан в 1955 г. | МОСКВА | *Выходит 6 раз в год*

УДК 534.231.1

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОСЦИЛЛЯЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ ИНТЕНСИВНОСТИ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ОКЕАНЕ

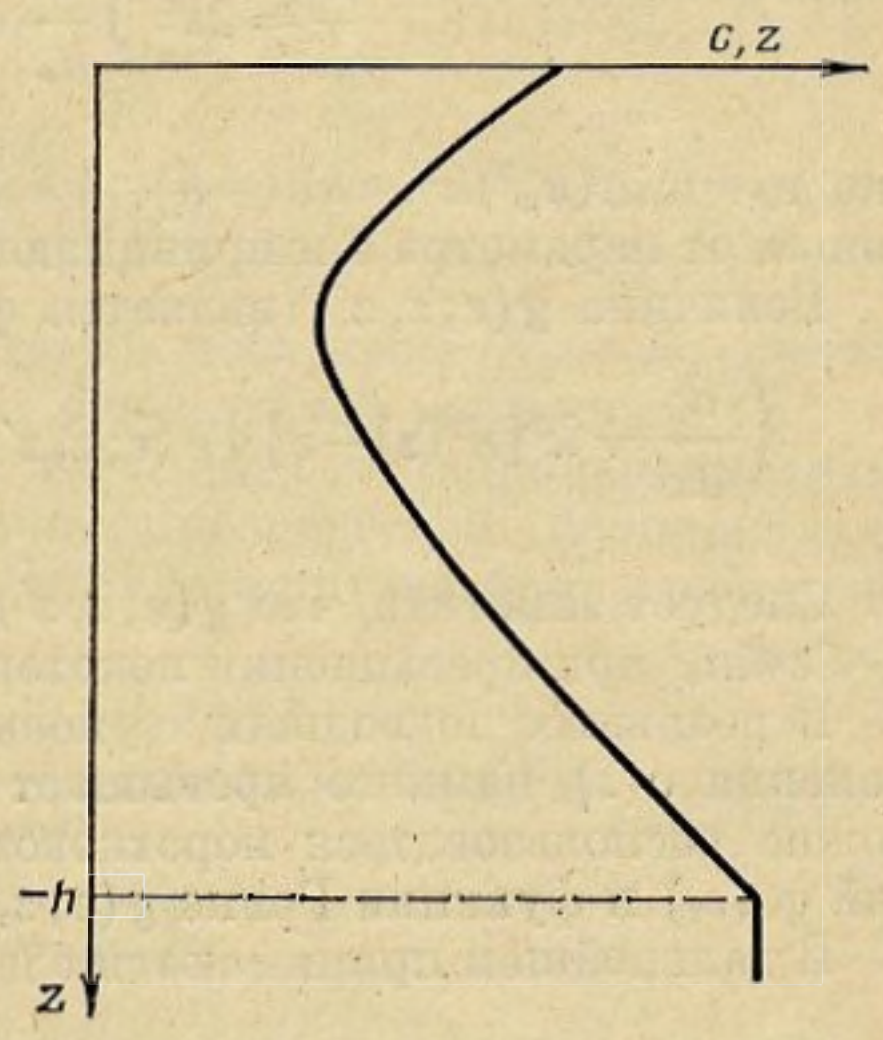
Абдуллаев С. С., Ниязов Б. А.

Развивается асимптотическая теория, описывающая осцилляционное поведение вертикального распределения интенсивности звукового поля точечного источника в стратифицированном океане. Полученные замкнутые аналитические выражения описывают вертикальное распределение интенсивности для произвольного профиля скорости звука.

Численные расчеты звукового поля точечного источника в стратифицированном океане обнаруживают осцилляционное поведение вертикального распределения интенсивности, усредненного по трассе распространения [1]. Это явление не описывается ни в рамках приближения геометрической оптики [2], ни волнового подхода работы [3]. Между тем амплитуда осцилляций интенсивности на некоторых глубинах океана значительно возрастает и становится порядка среднего уровня интенсивности.

Асимптотическим методам расчета звуковых полей в океане посвящены работы [4, 5], в которых, в частности, качественно изучалась вертикальная структура интенсивности поля. Однако методы этих работ не позволяют получить аналитический вид вертикального распределения интенсивности, усредненного по трассе распространения.

В настоящей работе развивается асимптотическая теория, описывающая осцилляционную структуру интенсивности звукового поля точечного источника в стратифицированном океане, причем получаемые замкнутые аналитические выражения применимы для произвольного вертикального профиля скорости звука и достаточно хорошо совпадают с численными расчетами.



Фиг. 1. Характерный вертикальный профиль скорости звука в океане

Пусть $z=0$ — поверхность океана, $z=-h$ — его дно. Профиль скорости звука $c(z)$ предполагается плавной функцией вертикальной координаты z, причем скорость звука в донных осадках считается равной скорости звука

© Издательство «Наука»,
«Акустический журнал», 1986 г.

у дна. Для определенности рассматривается ситуация, когда $c(-h)>c(0)$ (фиг. 1). Случай $c(-h)<c(0)$ может быть рассмотрен аналогично.

Показатель преломления среды определяется выражением $n(z)=\bar{c}/c(z)$, где $\bar{c}$ — некоторая средняя скорость звука в океане.

Пусть монохроматический точечный источник звука частоты f находится на глубине z_0. На достаточно больших расстояниях r от источника вертикальное распределение интенсивности звука, усредненное по трассе распространения в интервале $(r, r+R)$, где $R\gg 2\pi/\min(k_m-k_n)|_{m\neq n}$, дается выражением [1]

$$I(r,z)=\frac{Pc(z_0)}{2rc(z)}\sum_m \frac{\varphi_m^2(z_0)\varphi_m^2(z)}{k_m}. \tag{1}$$

Здесь P — мощность источника звука $\varphi_m(z)$ и k_m — соответственно нормированные собственные функции и собственные волновые числа волновода.

Суммирование в (1) ведется по распространяющимся в канале модам, константы распространения которых лежат в интервале $kn(-h)\leqslant k_m\leqslant kn_0$, где $n_0=\max n(z)$, а $k=2\pi f/\bar{c}$ — волновое число в однородной среде.

Величина $I(r,z)$ связана с «переходным» расстоянием $r_0(z)$ [1, 2] соотношением

$$I(r,z)=Pc(z_0)/4\pi r r_0(z)c(z). \tag{2}$$

Поэтому вместо интенсивности $I(r,z)$ можно рассматривать пропорциональную ей величину $1/r_0(z)$.

Из (1)—(2) следует соотношение

$$\frac{1}{r_0}=2\pi\sum_m \frac{\varphi_m^2(z_0)\varphi_m^2(z)}{k_m}. \tag{3}$$

Выражение (3) можно переписать в виде [6]

$$\frac{1}{r_0}=2k^2\int_{\varepsilon_F}^{n_0^2}\frac{d\varepsilon}{k_\varepsilon}\varphi_\varepsilon^2(z_0)\,\mathrm{Im}\,g(\varepsilon;z,z), \tag{4}$$

где $\varepsilon_F=\min(k_m^2/k^2)\approx kn(-h)$, $k_\varepsilon=k\sqrt{\varepsilon}$, $\varphi_\varepsilon(z)$ — волновая функция, зависящая от параметра ε и принимающая значение $\varphi_m(z)$ при $\varepsilon=k_m^2/k^2$.

Величина $g(\varepsilon;z,z')$ является функцией Грина краевой задачи:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+k^2[n^2(z)-\varepsilon]\right)g(\varepsilon;z,z')=-\delta(z-z'),\quad g(\varepsilon;z,z')|_{z=z'=0}=0. \tag{5}$$

Следует заметить, что $g(\varepsilon;z,z')$ экспоненциально убывает в интервале $\varepsilon_F\leqslant\varepsilon\leqslant n_0^2$ при превышении некоторой глубины $z_\varepsilon\geqslant -h$.

В реальных подводных звуковых каналах масштаб существенного изменения $c(z)$ намного превышает длину волны звука $\lambda=2\pi/k$. Поэтому можно воспользоваться коротковолновой асимптотикой волновых функций $\varphi_\varepsilon(z_0)$ и функции Грина $g(\varepsilon;z,z')$.

В дальнейшем принимаются следующие обозначения:

$$p_\varepsilon(z)=[n^2(z)-\varepsilon]^{1/2},\qquad \sigma_\varepsilon(z)=\int_{z_\varepsilon}^{z}p_\varepsilon(z)\,dz,$$
$$L_\varepsilon(z)=\int_{z_\varepsilon}^{z}[p_\varepsilon(z)]^{-1}dz,\qquad \sigma_\varepsilon^0=\sigma_\varepsilon(z_\varepsilon'),\qquad L_\varepsilon^0=L_\varepsilon(z_\varepsilon'). \tag{6}$$

Здесь z_ε и z_ε' — нижняя и верхняя точки поворота траектории луча, соответствующего данному значению ε и находящиеся из условия $p_\varepsilon(z)=0$.

Нормированная волновая функция $\varphi_\varepsilon(z_0)$ в ВКБ-приближении дается

выражением [7]

$$\varphi_\varepsilon(z_0)=(2/p_\varepsilon(z_0)L_\varepsilon^0)\cos\{k\sigma_\varepsilon(z_0)-\pi/4\}, \tag{7}$$

а коротковолновая асимптотика функции Грина имеет вид [6, 8]

$$g(\varepsilon;z,z')=-\frac{1}{2ik[p_\varepsilon(z)p_\varepsilon(z')]^{1/2}}\sum_j\exp\left\{ik\int\limits_{\gamma_j}p_\varepsilon ds-i\frac{\pi}{2}\mu_j\right\}. \tag{8}$$

В выражении (8) суммирование ведется по различным траекториям, соединяющим точки z и z'; γ_j — дуга j-й траектории; μ_j — индекс Морса [8] на j-й траектории.

Подставляя (7)—(8) в (4) и раскрывая произведения тригонометрических функций, можно получить для $1/r_0$ следующее выражение:

$$\frac{1}{r_0}=\int\limits_{\varepsilon_F}^{n^2_{\min}}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{1/2}L_\varepsilon^0p_\varepsilon(z)p_\varepsilon(z_0)}\sum_j\left(\cos\left\{k\oint\limits_{\gamma_j}p_\varepsilon ds-\frac{\pi}{2}\mu_j\right\}+\right.$$
$$\frac{1}{2}\cos\left\{k\oint\limits_{\gamma_j}p_\varepsilon ds+2k\sigma_\varepsilon(z_0)-\frac{\pi}{2}(\mu_j+1)\right\}+$$
$$\left.+\frac{1}{2}\cos\left\{k\oint\limits_{\gamma_j}p_\varepsilon ds-2k\sigma_\varepsilon(z_0)-\frac{\pi}{2}(\mu_j-1)\right\}\right), \tag{9}$$

где $n_{\min}=\min\{n(z),n(z_0)\}$.

Использованием асимптотической оценки интегралов [9] выражение (9) приводится к замкнутому виду (см. Приложение).

Результат представляется в виде суммы

$$1/r_0=K_0+K_1+K_2. \tag{10}$$

Главный вклад в интенсивность дает так называемая регулярная часть K_0, которая совпадает с результатом лучевой теории [2] и определяется выражением

$$K_0=\int\limits_{\varepsilon_F}^{n^2_{\min}}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{1/2}L_\varepsilon^0p_\varepsilon(z)p_\varepsilon(z)}. \tag{11}$$

Осцилляции интенсивности описываются добавками K_1 и K_2, причем характер осцилляций для каждой из них существенно различный.

Осцилляционная часть K_1 является вкладом от стационарной точки $\varepsilon_{st}(z,z_0)$, имеющейся в аргументе тригонометрической функции при асимптотической оценке интеграла в (9), соответствующего траектории $j=1$. Она представляется в виде

$$K_1=\left\{\frac{\pi}{k\varepsilon_{st}|D_{st}(z,z_0)|}\right)^{1/2}\frac{1}{2L_{st}^0p_{st}(z_0)p_{st}(z)}\cos\left\{2k[\sigma_{st}^0-\sigma_{st}(z)-\sigma_{st}(z_0)]+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}D_{st}(z,z_0)-\psi_{st}\right\}, \tag{12}$$

где индекс st означает, что соответствующие выражения берутся при значении $\varepsilon=\varepsilon_{st}(z,z_0)$; ψ_{st} принимает значение $\pi/2$, если $\varepsilon_{st}<n^2(0)$, и 0, если $\varepsilon_{st}>n^2(0)$.

Величина $D_{st}(z,z_0)$ дается выражением

$$D_{st}(z,z_0)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[L_\varepsilon^0-L_\varepsilon(z)-L_\varepsilon(z_0)]|_{\varepsilon=\varepsilon_{st}}.$$

Стационарная точка $\varepsilon_{st}(z,z_0)$ определяется из уравнения

$$L_\varepsilon(z)+L_\varepsilon(z_0)=L_\varepsilon^0. \tag{13}$$

Очевидно, что ε_{st} зависит от положения источника z_0 и приемника.

Следует отметить, что величина K_1 определяется порядком малости $\xi_{st}^{1/2}$, где $\xi_{st}=[khp_{st}(z)]^{-1}<1$, и справедливо соотношение $|K_1|/K_0\sim\xi_{st}^{1/2}$.

Из анализа (12) видно, что пространственный период осцилляции K_1 вдоль вертикальной координаты z имеет порядок $l_{st}\sim\pi/[kp_{st}(z_0)]=$ $=\pi/(k[n^2(z)-\varepsilon_{st}(z,z_0)]^{1/2})$.

При увеличении глубины z имеет место некоторое увеличение периода осцилляций. Аналогично при увеличении глубины погружения источника z_0 возрастает частота осцилляций интенсивности. Это находится в полном согласии с численными результатами работы [1], где, однако, этот факт не обсуждался.

Выражение для осцилляционной части K_2 в точках, не лежащих близко к поверхности $z=0$ и к уровням z_0, z_0', где z_0' определяется из уравнения $L_F(z_0')+L_F(z)=L_F^0$, имеет вид [1]

$$K_2=-\frac{\pi}{\varepsilon^{1/2}k(L_F^0)^2p_F(z)\,p_F(z_0)}\Bigg(\cos\{2k\sigma_F(z_0)\}\operatorname{ctg}\left\{\pi\frac{L_F(z_0)}{L_F^0}\right\}+$$
$$+\cos\{2k\sigma_F(z)\}\operatorname{ctg}\left\{\pi\frac{L_F(z)}{L_F^0}\right\}+\frac{1}{2}\sin\{2k[\sigma_F(z)+\sigma_F(z_0)]\}\times$$
$$\times\operatorname{ctg}\left\{\pi\frac{L_F(z)+L_F(z_0)}{L_F^0}\right\}+\frac{1}{2}\sin\{2k[\sigma_F(z_0)-\sigma_F(z)]\}\times$$
$$\times\operatorname{ctg}\left\{\pi\frac{L_F(z)-L_F(z_0)}{L_F^0}\right\}\Bigg). \qquad (14)$$

Во всей части канала (кроме зон, указанных ниже) величина осцилляционной части K_2 имеет по сравнению с регулярной частью K_0 порядок малости $\xi_F=[khp_F(z)]^{-1}\ll1$, т. е. $|K_2|/K_0\sim\xi_F\leqslant\xi_{st}$.

В узком слое с шириной порядка периода осцилляции $l_F\sim\pi/[kp_F(z)]$ вблизи поверхности океана K_2 резко возрастает до значения регулярной части K_0 с обратным знаком, что приводит к убыванию полной интенсивности до нуля на поверхности волновода.

Аналогичное возрастание величины K_2 до значения $0{,}5\,K_0$ имеет место при приближении приемника к уровню погружения источника z_0. По-видимому, этим объясняются различные значения в пиках вертикального распределения интенсивности на уровне источника и на «сопряженной» глубине [1] в численных результатах. Качественное исследование данного эффекта было проведено в работах [3, 5].

Характер осцилляций, описываемых членом K_2, практически не зависит от положения источника и число осцилляций равно количеству распространяющихся в канале мод.

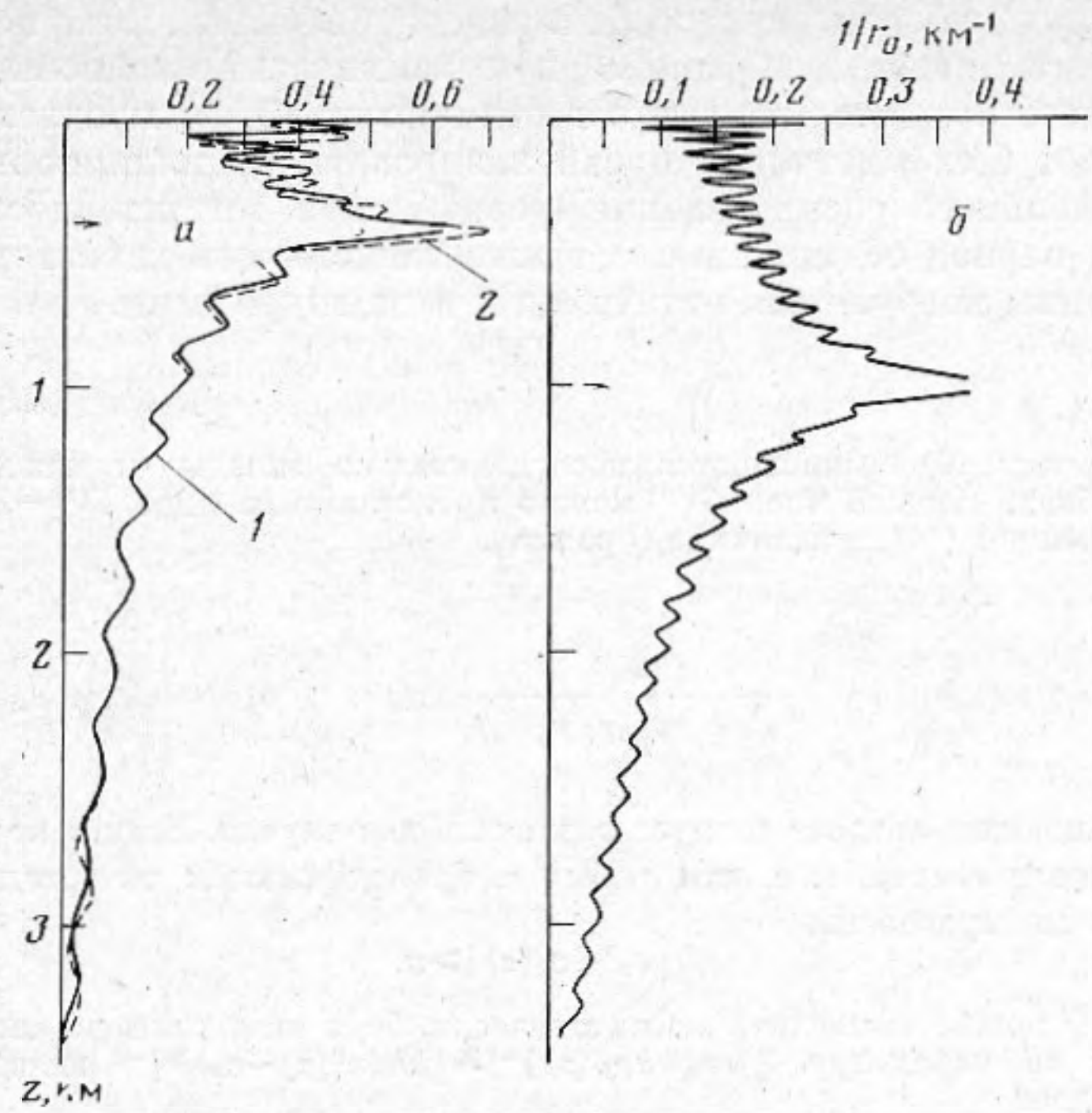
В качестве примера на фиг. 2 приведены графики зависимости величины $1/r_0(z)$ от глубины в сравнении с результатами работы [1] для линейного профиля скорости звука $c(z)=(1435+0{,}016\cdot z)$ м/с в океане глубины $h=3500$ м на частоте $f=100$ Гц.

Следует отметить, что стационарная точка $\varepsilon_{st}(z,z_0)$ может лежать вне интервала $(\varepsilon_F, n^2_{\min})$ или вообще не существовать для некоторых значений z. В этих случаях $K_1=0$ и осцилляции интенсивности описываются следующим по порядку малости членом K_2. Фиг. 3 иллюстрирует подобную ситуацию для профиля показателя преломления $n^2(z)=1-\alpha^2(z-z_M)^2$, где $\alpha=1{,}5\cdot10^{-4}$ м$^{-1}$.

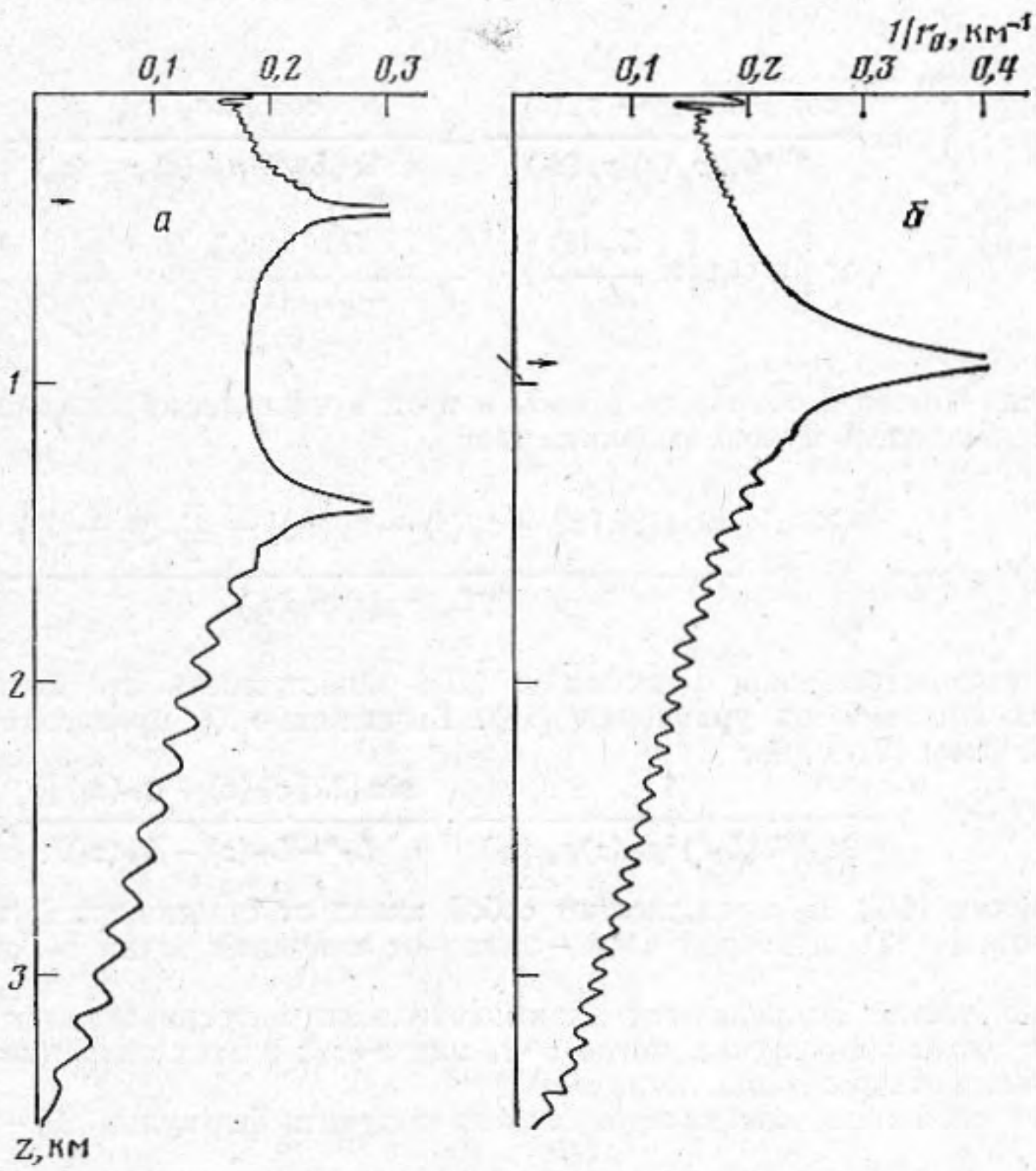
Формулы, описывающие вертикальное распределение интенсивности звукового поля, теряют свою справедливость при $z\to-h$, так как в этом случае нарушаются условия ВКБ-приближения. Следует заметить также, что выражение (10) расходится в случае $\bar{p}_\varepsilon(z)=p_\varepsilon(z_0)$ и не дает правильного значения интенсивности при приближении к уровню погружения источника z_0 и «сопряженной» глубине, если таковая имеется. Этот факт хорошо известен [2, 5], и в рамках данной теории проблема не разре-

---

[1] Здесь и далее индекс F означает, что соответствующие выражения берутся при значении $\varepsilon=\varepsilon_F$.



Фиг. 2. Вертикальное распределение интенсивности звука в океаническом волноводе с линейным профилем скорости звука: *а* – $z_0=-400$ м; *1* – расчет, выполненный методом данной работы, *2* – расчет численный [1]; *б* – $z_0=-1000$ м



Фиг. 3. То же для параболического профиля квадрата показателя преломления: *а* – $z_0=-400$ м, *б* – $z_0=z_м=-900$ м. Мелкомасштабные осцилляции в верхней части канала определяются порядком малости ξ_F; более значительные осцилляции в нижней части обусловливаются вкладом от стационарной точки $\varepsilon_{st}(z, z_0)$

шается. Однако вблизи этих особых точек интенсивность, по-видимому, можно оценить, используя равномерную асимптотику волновых функций.

В заключение подчеркнем, что в отличие от [3, 5] предложенный метод позволяет более детально проанализировать осцилляционную структуру вертикального распределения усредненной интенсивности, оценить величину и период осцилляций, а также зависимость характера осцилляций от глубины погружения источника и типа гидрологии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В выражении (9) вычисляются последовательно вклады от каждого члена в круглых скобках. Первый член $S^{(1)}$ можно представить в виде $S^{(1)}=K_0+Q$, где K_0 дается выражением (11), а величина Q равна

$$Q=\sum_{j\neq 0}\int\limits_{\varepsilon_F}^{n^2_{\min}}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{1/2}L_\varepsilon{}^0 p_\varepsilon(z)\,p_\varepsilon(z_0)}\cos\left\{k\oint\limits_{\gamma_j}p_\varepsilon ds-\frac{\pi}{2}\mu_j\right\}. \qquad (\text{П1})$$

При дальнейшем анализе следует различать два случая. Если z не лежит близко к поверхности океана, т. е. для любых ε, принадлежащих интервалу $(\varepsilon_F,\ n^2_{\min})$, удовлетворяется неравенство

$$k[\sigma_\varepsilon{}^0-\sigma_\varepsilon(z)]>\pi, \qquad (\text{П2})$$

то величину Q можно вычислить асимптотически, беря интегралы по частям и оставляя главный по параметру $\xi_F=[khp_F(z)]^{-1}=[kh(n^2(z)-\varepsilon_F)^{1/2}]^{-1}$ вклад в нижнем пределе. Это дает

$$Q=-\frac{\pi}{\varepsilon_F{}^{1/2}k(L_F{}^0)^2p_F(z)\,p_F(z_0)}\cos\{2k\sigma_F(z)\}\operatorname{ctg}\left\{\pi\frac{L_F(z)}{L_F{}^0}\right\}. \qquad (\text{П3})$$

Если неравенство (П2) не удовлетворяется, то в выражении (П1) следует выделить член, соответствующий $j=1$, который нельзя вычислять асимптотически в силу того, что соответствующее подынтегральное выражение не осциллирует. Таким образом, имеем

$$Q=\int\limits_{\varepsilon_F}^{n^2_{\min}}d\varepsilon\,\frac{\cos\{2k[\sigma_\varepsilon{}^0-\sigma_\varepsilon(z)]\}}{\varepsilon^{1/2}L_\varepsilon{}^0p_\varepsilon(z)\,p_\varepsilon(z_0)}-\frac{\cos\{2k\sigma_F(z)\}}{\varepsilon^{1/2}k(L_F{}^0)^2p_F(z)\,p_F(z_0)}\times$$
$$\times\left[\pi\operatorname{ctg}\left\{\pi\frac{L_F(z)}{L_F{}^0}\right\}+\frac{L_F^0}{L_F{}^0-L_F(z)}\right]. \qquad (\text{П4})$$

Очевидно, что при $z=0$ $S^{(1)}=0$.

Аналогично можно рассмотреть второй и третий члены в круглых скобках выражения (9). Однако здесь нужно выделить член

$$Q'=\frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon_F}^{n^2_{\min}}d\varepsilon\,\frac{\cos\{2k[\sigma_\varepsilon^0-\sigma_\varepsilon(z)-\sigma_\varepsilon(z_0)]-\frac{\pi}{2}(\mu_1-1)\}}{\varepsilon^{1/2}L_\varepsilon{}^0p_\varepsilon(z)\,p_\varepsilon(z_0)}. \qquad (\text{П5})$$

Аргумент тригонометрической функции в (П5) может иметь стационарную точку $\varepsilon_{st}(z,\ z_0)$, находящуюся из уравнения (13). Вычисление Q' производится методом стационарной фазы [9] и дает

$$Q'=K_1+\frac{1}{2\varepsilon_F{}^{1/2}k(L_F{}^0)^2p_F(z)\,p_F(z_0)}\cdot\frac{\sin\{2k[\sigma_F(z)+\sigma_F(z_0)]\}}{L_F{}^0-L_F(z)-L_F(z_0)}. \qquad (\text{П6})$$

В выражении (П6) K_1 представляет собой вклад от стационарной точки, даваемый выражением (12), а второй член – вклад от концевой точки ε_F, имеющей порядок ξ_F.

Остальные члены вычисляются асимптотически интегрированием по частям. (Исключение составляют случаи, когда $z\to z_0$ или $z\to z_0'$; в этих ситуациях рассмотрение ведется аналогично случаю, когда $z\to 0$.)

Производя сложение всех вкладов, можно получить формулы (10)–(14).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абросимов Д. И.* О вертикальном распределении интенсивности звука в подводном звуковом канале.– Акуст. журн., 1983, т. 29, № 3, с. 309–314.
2. *Бреховских Л. М.* Усредненное поле в подводном звуковом канале.– Акуст. журн., 1965, т. 11, № 2, с. 148–159.

3. *Weston D. E.* Wave-theory peaks in range-averaged channels of uniform sound velocity.– JASA, 1980, v. 68, № 1, p. 282–286.
4. *Булдырев В. С., Буслаев В. С.* Распространение звука в океане. Препринт № 45(417). М.: ИРЭ АН СССР, 1984. 43 с.
5. *Булдырёв В. С., Буслаев В. С.* Качественная структура акустического поля в океане. Препринт № 44(416). М.: ИРЭ АН СССР, 1984. 55 с.
6. *Абдуллаев С. С.* Пространственная когерентность оптического поля в многомодовых волноводах.– Квантовая электроника, 1984, т. 11, № 5, с. 904–912.
7. *Алувэлья Д. С., Келлер Дж. Б.* Точные и асимптотические представления звукового поля в стратифицированном океане.– В кн.: Распространение волн и подводная акустика/Под ред. Келлера Дж. Б., Пападакиса Дж. С. М.: Мир, 1980, с. 20–75.
8. *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
9. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.
10. *Прудников А. П. и др.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.

Ташкентский государственный
университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
8.X.1984
после исправления
30.IV.1985