ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Д. Г., Симонов И. В.* Асимптотические оценки комплексных частот колебаний оболочки в жидкости.– Препринт № 186. М.: Институт проблем механики АН СССР. 1981, с. 41–42.
2. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972.
3. *Ляпунов В. Т., Никифоров А. С.* Виброизоляция в судовых конструкциях. Л.: Судостроение, 1975.
4. *Лямшев Л. М.* Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1955.
5. *Федорюк М. В.* Рассеяние звуковых волн тонким акустически жестким телом вращения.– Акуст. журн., 1981, т. 27, № 4, с. 605–609.
6. *Бойко А. И.* Рассеяние плоских волн тонким телом вращения.– Акуст. журн., 1983, т. 29, № 3, с. 321–325.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
9.I.1985

УДК 534

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ТОНКОМ ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ В ДВУСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Немцова В. Н., Федорюк М. В.

Пусть имеется жидкий слой, лежащий на жидком полупространстве. При $x<0$ предполагается наличие вакуума или достаточно разреженной среды. При $x>0$ среда состоит из двух слоев: верхнего слоя с параметрами ρ_c, c и нижнего слоя – полупространства – с параметрами ρ_c^1, c_1. В пределах каждого слоя среда однородна и изотропна.

Пусть в верхнем слое $0<x<h$ расположено абсолютно жесткое тело вращения $\mathscr{D}_\varepsilon$, так что его центр лежит в точке с координатами $(x_0,\ 0,\ l/2)$, где l – длина тела (фиг. 1).

Предположим, что в верхнем слое могут существовать нормальные волны

$$P_j=A_jH_0^{(1)}(\alpha_j|\rho-\rho_0|)\sin(b_jx/h). \tag{1}$$

где $|\rho|=\sqrt{y^2+z^2}$, $|\rho_0|=\sqrt{y_0^2+z_0^2}$ (причем $\rho_0\gg 1/\alpha_j$, $\rho_0\gg l$), $\alpha_j=\sqrt{k^2h^2-b_j^2}/h$, а b_j находится из дисперсионного уравнения [1] $\operatorname{ctg} b_j=-\rho_c\sqrt{h^2k^2-h^2k_1^2-b_j^2}/\rho_c^1 b_j$. Это уравнение в зависимости от $h^2k^2-h^2k_1^2$ может иметь различное число вещественных корней. Будем считать, что $h^2k^2-h^2k_1^2$ таково, что имеется $N\geqslant 1$ положительных чисел $b_1^2, b_2^2, \ldots, b_N^2$.

Рассмотрим задачу о рассеянии нормальной волны (1) тонким телом вращения, причем предположим, что длина тела имеет порядок длины волны, а его толщина много меньше длины волны: $l\cong\lambda$, $d\ll\lambda$.

Границу S тела зададим уравнением $r=\varepsilon F(z)$, где $r=\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}$, φ, z – цилиндрические координаты, функция $F(z)$ – неотрицательная и достаточно гладкая при $0<z<l$, $F(0)=F(l)=0$, $\varepsilon>0$ – малый параметр.

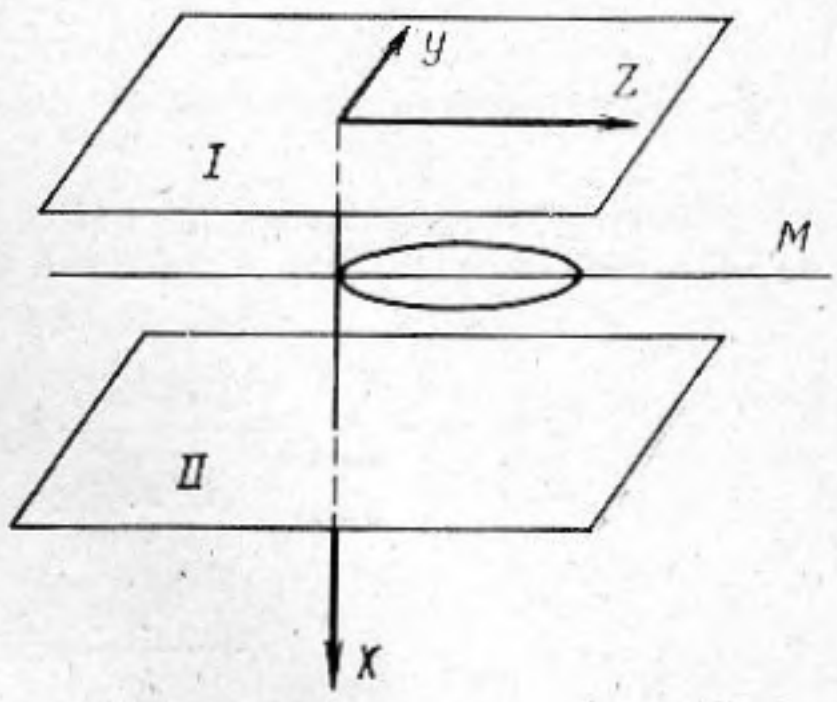
Рассеянное поле внутри слоя $0<x<h$ должно удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$(\Delta+k^2)U=0, \tag{2}$$

краевому условию

$$\partial U/\partial n|_S=-\partial P_j/\partial n|_S,\quad (r,\ z)\in S, \tag{3}$$

и условиям излучения на бесконечности. Нормаль n – внешняя.



Фиг. 1. Тонкое тело вращения $\mathscr{D}_\varepsilon$, расположенное в двуслойной жидкости: I – плоскость $x=0$, II – плоскость $x=h$, M – ось вращения тела

Проанализируем рассеянное поле при помощи метода [2, 3], который ранее был использован для решения задач дифракции в работах [4, 5].

Приближенное решение задачи (2)–(3) будем искать в виде суммы волнового потенциала, сосредоточенного на отрезке $r=0$, $0<z<l$ и его производных:

$$U=\int_0^l \mu_1(t)G(r,z-t)\,dt+\int_0^l \mu_2(t)G_x(r,z-t)\,dt+\int_0^l \mu_3(t)G_y(r,z-t)\,dt. \tag{4}$$

Здесь $\mu_m(t)$ — неизвестные плотности объемной скорости, $G(r, z)$ — функция Грина данной задачи, а G_x, G_y — функции, удовлетворяющие уравнениям $(\Delta+k^2)G_{x_i}=\partial\delta(x-x_0, y, z)/\partial x_i$, $i=1, 2$, внутри верхнего слоя (вне $\mathscr{D}_\varepsilon$), краевым условиям на границе слоя и условиям излучения на бесконечности.

Заметим, что в виде (4) можно искать поле и в полупространстве $x>h$, т. е. формула (4) справедлива во всей области $x>0$.

Функция Грина верхнего слоя $G(r, z)$ найдена в работе [1]. При решении задачи потребуется только ее асимптотика в точке $(x_0, 0, 0)$:

$$G(r, z)=-\exp\{ikR\}/4\pi R+C, \tag{5}$$

где $R=\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}$, а C — некоторая константа и асимптотическое разложение на бесконечности $(0<x<h,\ \rho=\sqrt{y^2+z^2}\to\infty)$:

$$G(r, z)=\frac{1}{2i}\sum_{p=1}^{N}\frac{\exp\{i\alpha_p\rho\}}{\sqrt{\alpha_p\rho}}B_p\sin\frac{b_px}{h}\sin\frac{b_px_0}{h}. \tag{6}$$

Очевидно, что

$$G_y(r, z)=\partial G(r, z)/\partial y, \tag{7}$$

а $G(x)$ можно представить в виде

$$G_x(r, z)=-\frac{1}{2i}\sum_{p=1}^{N}\frac{\exp\{i\alpha_p\rho\}}{\sqrt{\alpha_p\rho}}B_p\frac{b_p}{h}\sin\frac{b_px}{h}\cos\frac{b_px_0}{h}. \tag{8}$$

Первый интеграл, входящий в формулу (4), допускает при $r\to 0$, $0\leqslant z\leqslant l$ представление [4]:

$$I_1(r, z)=\ln(kr)\sum_{s=0}^{\infty}a_{1s}(z)r^{2s}+\sum_{s=0}^{\infty}b_{1s}(z)r^{2s}, \tag{9}$$

а I_2 и I_3 получаются дифференцированием I_1 по x и y соответственно с заменой a_{1s} и b_{1s} на a_{ms} и b_{ms}, $m=2, 3$. Здесь a_{ms} и b_{ms} — бесконечно дифференцируемые функции, причем

$$a_{m0}=\mu_m(z)/2\pi,\qquad b_{m0}=-\frac{1}{4\pi}\mu_m|z|\ln[4k^2z(l-z)]+C\int_0^l\mu_m(t)\,dt-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^l\frac{\exp\{ik|t-z|\}\mu_m(t)-\mu_m(z)}{|t-z|}\,dt. \tag{10}$$

Используя формулы (4)—(10) и производя необходимые выкладки, можно получить рассеянное поле в дальней зоне (при $\rho\gg l$) в следующем виде:

$$U=\frac{1}{2i}\sum_{p=1}^{N}\frac{\exp\{i\alpha_p\rho\}}{\sqrt{\alpha_p\rho}}B_pA_j\sin\frac{b_px}{h}\left[\sin\frac{b_px_0}{h}\sin\frac{b_jx_0}{h}f_{pj}^{(1)}(\theta)+\right.$$
$$\left.+\frac{b_pb_j}{h^2}\cos\frac{b_px_0}{h}\cos\frac{b_jx_0}{h}f_{pj}^{(2)}(\theta)\right], \tag{11}$$

где $\theta=\operatorname{arctg}(y/z)$, а $\theta_0=\operatorname{arctg}(y_0/z_0)$.

В этой формуле

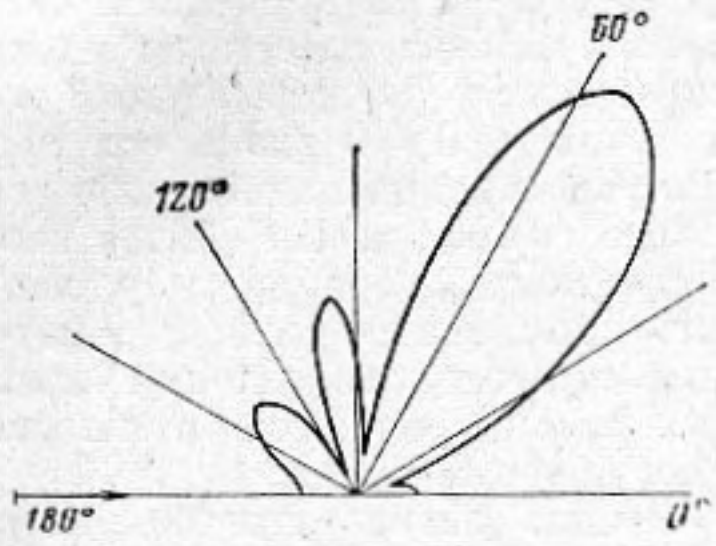
$$f_{pj}^{(1)}(\theta)=-\sqrt{\frac{2\alpha_j}{\pi\rho_0}}\exp\left\{i\left(\alpha_p\rho_0+\frac{3\pi}{4}\right)\right\}\times$$
$$\times\int_0^l(i\cos\theta_0S'(t)-2\alpha_p\sin\theta\sin\theta_0S(t))\exp\{it(\alpha_j\cos\theta_0-\alpha_p\cos\theta)\}\,dt,$$

$$f_{pj}^{(2)}(\theta)=-2\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha_j\rho_0}}\exp\left\{i\left(\alpha_p\rho_0-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\times$$

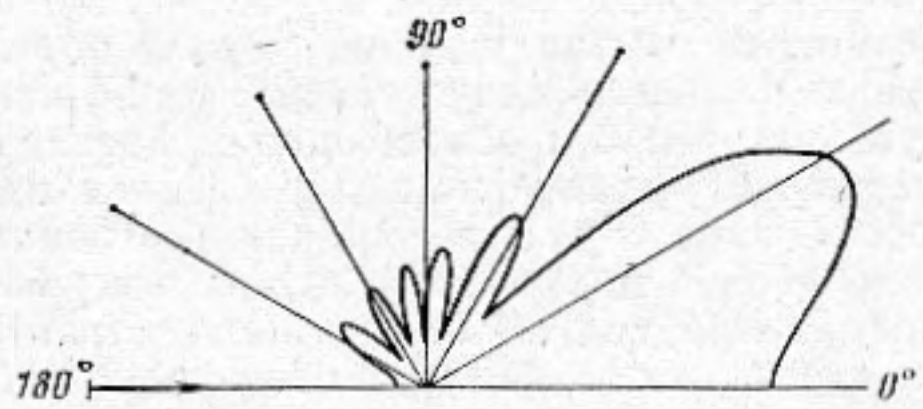
$$\times \int_0^l S(t)\exp\{it(\alpha_j \cos\theta_0 - \alpha_p \cos\theta)\}dt. \tag{12}$$

Здесь $S(z)=\pi\varepsilon^2 F^2(z)$ – площадь поперечного сечения тела.

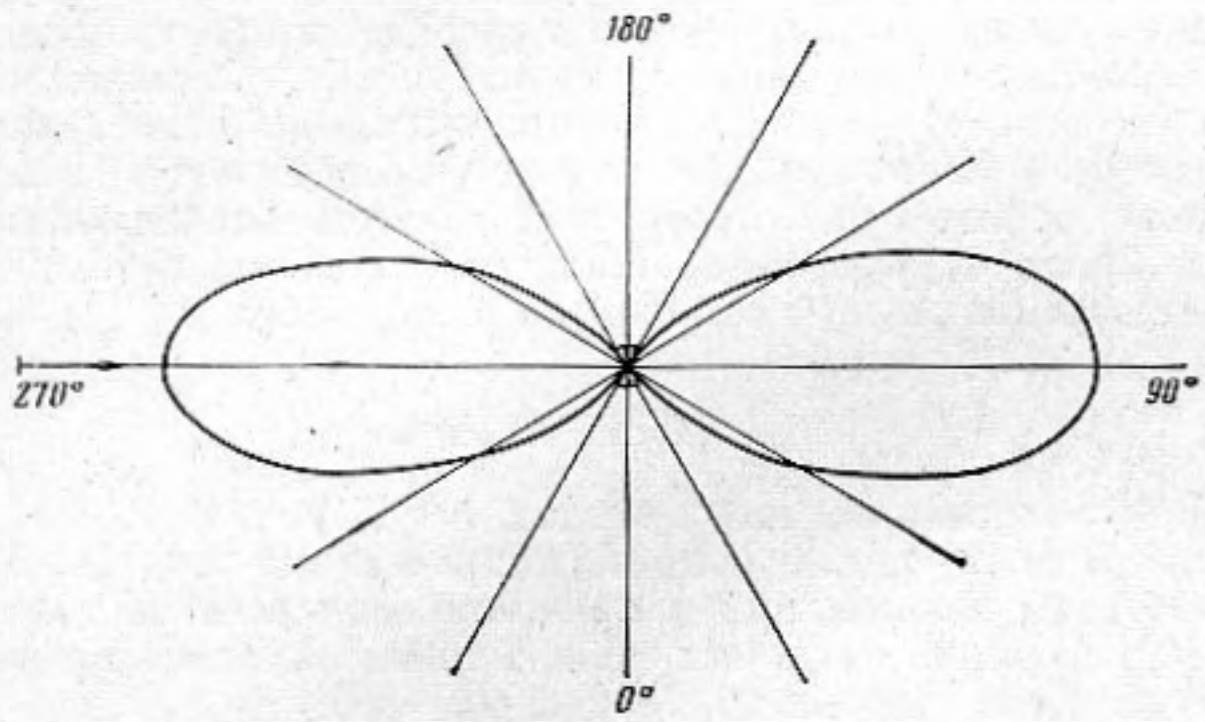
Рассматривая полученные формулы (11) – (12), можно заметить, что рассеянное поле зависит только от таких геометрических характеристик тела $\mathscr{D}_\varepsilon$, как площадь поперечного сечения $S(z)$ и ее производная. Аналогичная зависимость наблюдается



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

Фиг. 2. Угловая характеристика рассеяния идеально жесткого сфероида при $kl=10{,}472$

Фиг. 3. Угловая характеристика рассеяния жесткого сфероида при боковом падении первой нормальной волны для $kl=10{,}472$

Фиг. 4. Угловая характеристика рассеяния идеально жесткого сфероида при $kl=20{,}944$

в гидродинамике, в задаче обтекания тонкого тела вращения потоком идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости [6].

Теперь рассмотрим случай, когда S – вытянутый сфероид:

$$(dr/\varepsilon)^2+(z-l/2)^2=(l/2)^2 \tag{13}$$

с полуосями $l\varepsilon/2d$, $l/2$. Тогда

$$f_{pj}^{(1)}=-\varepsilon^2\frac{l^2\alpha_j}{d^2 J_p^2}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_j\rho_0}}\exp\{i(J_p+\alpha_p\rho_0-\pi/4)\}\times$$

$$\times[J_p\cos J_p-\sin J_p](\cos\theta_0-l\alpha_p\sin\theta_0\sin\theta/J_p);$$

$$f_{pj}^{(2)}=\varepsilon^2\frac{l^3}{d^2 J_p^3}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha_j\rho_0}}\exp\{i(J_p+\alpha_p\rho_0-\pi/4)\}[J_p\cos J_p-\sin J_p], \tag{14}$$

где $J_p=(\alpha_j\cos\theta_0-\alpha_p\cos\theta)l/2$.

Если точка наблюдения лежит на поверхности S тела, но не слишком близко от его кромок, то

$$U=-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2S(z)}{\alpha_j\rho_0}}A_j\exp\{i(\alpha_j\rho_0+\alpha_j z\cos\theta_0)\}\times$$

$$\times e^{-\pi/4}\left[\frac{b_j}{h}\cos\frac{b_j x_0}{h}\cos\varphi+i\alpha_j\sin\frac{b_j x_0}{h}\sin\theta_0\sin\varphi\right],$$

где φ – угол между x и y.

В случае, если тело $\mathscr{D}_\varepsilon$ имеет в точке $r=0$, $z=0$ ненулевой радиус кривизны и при малых $z>0$ имеет место $F(z)=\sqrt{2az}$, то при падении нормальной волны вида (1) асимптотика рассеянного поля в «носике» $r=0$, $z=0$ при $\varepsilon\to 0$ имеет вид

$$U=\varepsilon^2 \ln \varepsilon \sqrt{\frac{2\alpha_j}{\pi\rho_0}} A_j a \exp\left\{ i\left(\alpha_j\rho_0+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\cos\theta_0 \sin\left(\frac{b_j x_0}{h}\right)+O(\varepsilon^2).$$

Необходимо отметить, что поле при $x>h$ можно найти аналогичным образом. Оно зависит от y и z так же, как и в формулах (11)–(12).

Для графической иллюстрации формул (11), (12), (14) были приведены численные расчеты. На фиг. 2 представлена угловая характеристика рассеяния идеально жесткого сфероида. В этом случае в слое распространяются две нормальные волны и рассмотрен случай падения первой нормальной волны с $\theta_0=0$ вдоль оси вращения тела. На фиг. 3 представлен случай, когда нормальная волна падает вдоль оси y под углом $\theta_0=\pi/2$ к оси вращения идеально жесткого сфероида. На фиг. 4 изображена угловая характеристика рассеяния идеально жесткого сфероида на удвоенной частоте. В этом случае в слое распространяется пять нормальных волн. Рассмотрено падение первой нормальной волны. Фигуры 1, 3 симметричны относительно направления падения волны. Все угловые характеристики рассматриваются в плоскости $x=x_0$; стрелками на фигурах обозначено направление падения волны.

Из приведенных графиков следует, что полученные результаты находятся в хорошем соответствии с материалом, представленным в работах [7, 8], который был получен при проведении точных расчетов рассеяния на вытянутых сфероидах, и с данными работы [5], полученными на основании асимптотических формул для рассеяния на идеально жестком сфероиде в свободном пространстве.

Некоторое несоответствие угловых характеристик, вытекающих из точного расчета для свободного пространства, с полученными на основании асимптотических формул в двухслойной жидкости, заключается в основном в амплитудах рассеяния вперед и в уровне боковых лепестков. Эта разница связана с видом нормальных волн и функций Грина в двуслойной жидкости, а также с тем, что выше рассматривалось рассеяние не бегущей, а стоячей по оси x волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
3. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
4. *Федорюк М. В.* Рассеяние звуковых волн тонким акустически жестким телом вращения.– Акуст. журн., 1981, т. 27, № 4, с. 605–609.
5. *Бойко А. И.* Рассеяние плоских волн тонким телом вращения.– Акуст. журн., 1983, т. 29, № 3, с. 321–325.
6. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
7. *Клещев А. А., Шейба Л. С.* Рассеяние звуковой волны идеальными вытянутыми сфероидами.– Акуст. журн., 1970, т. 16, № 2, с. 264–268.
8. *Белкина М. Г.* Характеристика излучения вытянутого эллипсоида вращения.– В кн.: Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения. М.: Сов. радио, 1957, с. 126–147.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
18.II.1985

УДК 534.2:532

ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА ПРИ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКА И ПРИЕМНИКА ВОЛН В ПРОИЗВОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Сухоруков В. И., Сухоруков Г. И.

В настоящее время эффект Доплера в акустике в общем виде описывают формулой [1, 2]: $\nu=\nu_0(c_0\pm v\cos\alpha_0)/(c_0\mp u\cos\beta_0)$, где ν_0 – частота волн, излучаемых источников, ν – частота волн, воспринимаемых приемником, v и u – соответственно скорости движения приемника и источника, c_0 – скорость распространения волн, α_0 и β_0 – соответственно углы между линией наблюдения и направлениями движения приемника и источника в момент излучения волны. Данная формула не учитывает величин второго порядка по v/c_0 и u/c_0. Ниже приводятся выводы точных формул для трех возможных случаев.

На фиг. 1 изображен случай, когда источник покоится в точке B_0, а приемник движется вдоль прямой A_0A. В точке A_0 приемник находился в момент излучения волны, а в точке A – в момент встречи с нею. За бесконечно малый промежуток времени до встречи dt волна находилась на расстоянии dl от приемника. Мгновен-