О СТРУКТУРЕ ПОЛЕЙ, ИЗЛУЧЕННЫХ СЛУЧАЙНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ НА ПЛОСКОСТИ

Тоноян И. П.

Исследованию распространения шумовых полей в рамках модели однородного полупространства с некоррелированными направленными источниками на плоскости посвящено достаточно много работ [1-4], при другом подходе [5] на поверхности задается корреляционная функция давлений. Установление связи между этими двумя подходами, что важно, например, при решении обратной задачи — восстановлении направленности элементарного источника по корреляционным измерениям [2] шумового поля, является одной из основных задач настоящей статьи. Укажем, что ранее такая задача рассматривалась в работе [6], выводы которой существенно отличаются от полученных ниже результатов, что связано с видом функции корреляции источников.

Пусть по бесконечной плоскости D в точках \mathbf{R}_s распределены случайные монохроматические источники с частотой ω . Поле $\psi(\mathbf{R}_s,\mathbf{R})$ в точке \mathbf{R} , создаваемое ис-

точником с координатой R_s

$$\psi(\mathbf{R}_{s}, \mathbf{R}) = B(\mathbf{R}_{s}) p(\mathbf{R}_{s}, \mathbf{R}),$$

$$p(\mathbf{R}_{s}, \mathbf{R}) = \frac{\exp(ik'|\mathbf{R} - \mathbf{R}_{s}|)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_{s}|} \cos^{m}((\mathbf{R} - \mathbf{R}_{s}), \mathbf{n}),$$
(1)

где $B(\mathbf{R}_s)$ — случайная комплексная амплитуда звукового давления $k'\!=\!k\!+\!rac{1}{2}i\gamma,\;k\!=\!$

 $=\omega/c$, c — скорость распространения воли в среде, γ — энергетический коэффициент поглощения в среде, m, как и в [1],— параметр, определяющий степень направленности источников, \mathbf{n} — нормаль к плоскости D.

Функция пространственной корреляции шумового поля в точках R и R':

$$\Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \int_{D} \int_{D} \langle B(\mathbf{R}_{\bullet}) B^{\bullet}(\mathbf{R}_{\bullet}') \rangle p(\mathbf{R}_{\bullet}, \mathbf{R}) p^{\bullet}(\mathbf{R}_{\bullet}', \mathbf{R}') d\mathbf{R}_{\bullet}' d\mathbf{R}_{\bullet}, \qquad (2)$$

где символ $\langle ... \rangle$ означает статистическое усреднение, а * — комплексно-сопряженную величину. Если источники изотропны, то $\langle B(\mathbf{R}_s)B^*(\mathbf{R}_{s'})\rangle = A(|\mathbf{R}_s - \mathbf{R}_{s'}|)$. Полагая

$$\mathbf{R}: \left(\frac{d}{2}\sin\alpha, \ z - \frac{d}{2}\cos\alpha, 0\right), \mathbf{R}': \left(\frac{d}{2}\sin\alpha, \ z + \frac{d}{2}\cos\alpha, \pi\right)$$
 и переходя к по-

лярным координатам \mathbf{R}_s : (r, φ) , \mathbf{R}_s' : (r', φ') , интегрирование в (2) проведем в переменных r, φ , ρ , ψ , где $\rho \cos \psi = r \cos \varphi - r' \cos \varphi'$, $\rho \sin \psi = r \sin \varphi - r' \sin \varphi'$

$$\Gamma(kd, z) = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\exp[ik(L_{1}-L_{2}) - \gamma(L_{1}+L_{2})]}{L_{1}L_{2}} \times \left[\frac{z^{2} - (d/2)^{2} \cos^{2}\alpha}{L_{1}L_{2}} \right]^{m} A(\rho) r dr d\phi \rho d\rho d\psi,$$

$$L_{1}^{2} = \left(r \cos \phi - \frac{d}{2} \sin \alpha \right)^{2} + r^{2} \sin^{2}\phi + \left(z - \frac{d}{2} \cos \alpha \right)^{2},$$

$$L_{2}^{2} = \left(r \cos \phi - \rho \cos \psi + \frac{d}{2} \sin \alpha \right)^{2} + (r \sin \phi - \rho \sin \psi)^{2} + \left(z + \frac{d}{2} \cos \alpha \right)^{2}.$$
(3)

Полагая, что область, в которой $A(\rho)$ заметно отличается от нуля, существенно меньше z, а также, что $d \ll z$, выражение (3) можно существенно упростить, полагая в показателе экспоненты

$$L_0 = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad L_1 = L_0 \left[1 - \frac{d}{2} \frac{r \cos \varphi \sin \alpha + z \cos \alpha}{L_0^2} \right],$$

$$L_2 = L_0 = \left[1 - \cos(\varphi - \psi) \frac{r\rho}{L_0^2} + (r \cos \varphi \sin \alpha + z \cos \alpha) \frac{d}{2L_0^2} \right],$$

в прочих же сомножителях положим $L_1=L_2=L_0$. В этом случае, выражая через известные функции интеграл по ϕ [7] и далее интеграл по ψ [7, формула 2.12.27.6], формулу (3) после простых преобразований можно привести к виду

$$\Gamma(kd,z) = (2\pi)^2 \int_0^{\pi/2} \exp[-\gamma z \sec \vartheta - ikd \cos \alpha \cos \vartheta] J_0(kd \sin \alpha \sin \vartheta) \times$$

$$Q(\vartheta) = \int_{0}^{\infty} J_{0}(k\rho \sin \vartheta) A(\rho) \rho d\rho.$$

 $\times \cos^{2m-1} \vartheta \sin \vartheta Q(\vartheta) d\vartheta$,

Анализ выражения (4) проведем для функции корреляции источников вида

$$A(\rho) = (2\pi)^{-1} \rho^{-1} \Delta(\rho, \sigma), \tag{5}$$

(4)

где в качестве $\Delta(\rho, \sigma)$ выберем функции, удовлетворяющие предельному соотношению $\lim_{\sigma\to 0} \Delta(\rho, \sigma) = \delta(\rho)$ — дельта-функция Дирака:

$$\Delta(\rho, \sigma) = 2\pi^{-1/2}k\sigma^{-1}\exp(-k^2\rho^2/\sigma^2),$$
 (5a)

$$\Delta(\rho, \sigma) = 3^{i-1}k\sigma^{-1}J_i(k\rho/\sigma)/(k\rho/\sigma)^i, i=1, 2,$$
 (56)

где $J_i(...)$ функция Бесселя 1-го рода порядка i. Выражение (5а) — известное представление δ -функции при $\sigma \to 0$; при $\rho \neq 0$ выражение (5б) при $\sigma \to 0$ стремится к нулю, а при $\rho = 0$ равно $\frac{3^{i-1}}{2^i i!} k \sigma^{-1}$, так что в пределе $\sigma \to 0$ стремится к бесконечности.

Численный коэффициент в (5) выбран из условия:

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} A(\rho) \rho \, d\rho \, d\varphi = 1,$$

являющегося при $\sigma \to 0$ обычной нормировкой δ -функции в полярных координатах. Выбор функции корреляции источников в виде (5), (5a), (5б) позволяет перейти к дельта-коррелированным источникам в пределе $\sigma \to 0$. Отметим, что в работе [6], где рассматривалась связь между двумя аналитическими моделями шумовых полей — коррелированные и некоррелированные (с направленностью $\cos^m \theta$) источники на плоскости, использовалась функция корреляции источников, которую можно записать в принятых здесь обозначениях:

$$\Delta(\rho, \sigma) = \text{const } J_i(k\rho/\sigma)/(k\rho/\sigma)^{i-1},$$

где $\sigma=1$, $i\geq 1$ — очевидно, что в приведенном выражении переход $\sigma\to 0$ приводит к тривиальным результатам. Интеграл по ρ в (4) для функции корреляции (5), (5a) запишем в виде [7, ф. 2.12.9.1]

$$Q(\vartheta) = (2\pi)^{-1} \exp(-\sigma^2 \sin^2 \vartheta/8) I_0(\sigma^2 \sin^2 \vartheta/8). \tag{6a}$$

Аналогично для функции корреляции (5), (56) [7, ф. 2.12.31]

$$Q(\vartheta) = (2\pi)^{-1} (3/2)^{i} (3\sigma)^{-1} \times$$

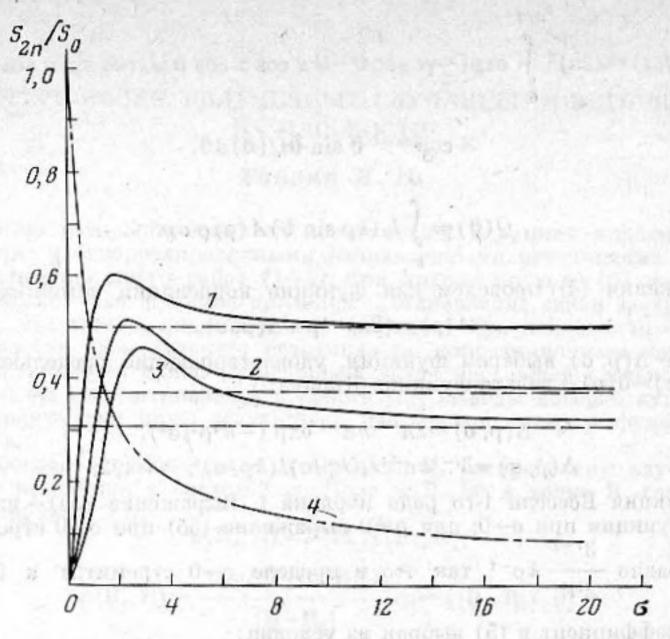
$$\times \left\{ \begin{array}{l}
\sigma \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(i+1/2)} {}_{2}F_{1}\left(\frac{1}{2}, -i + \frac{1}{2}, 1, \sigma^{2} \sin^{2} \vartheta\right), \quad \sigma \sin \vartheta < 1 \\
\times \left\{ \frac{\sin^{-1} \vartheta}{\Gamma(i+1)} {}_{2}F_{1}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, i+1, (\sigma \sin \vartheta)^{-2}\right), \quad \sigma \sin \vartheta > 1. \end{array} \right.$$
(66)

Далее оказывается целесообразным выразить (6б) через эллиптические интегралы первого — K(x) и второго — E(x) родов ¹

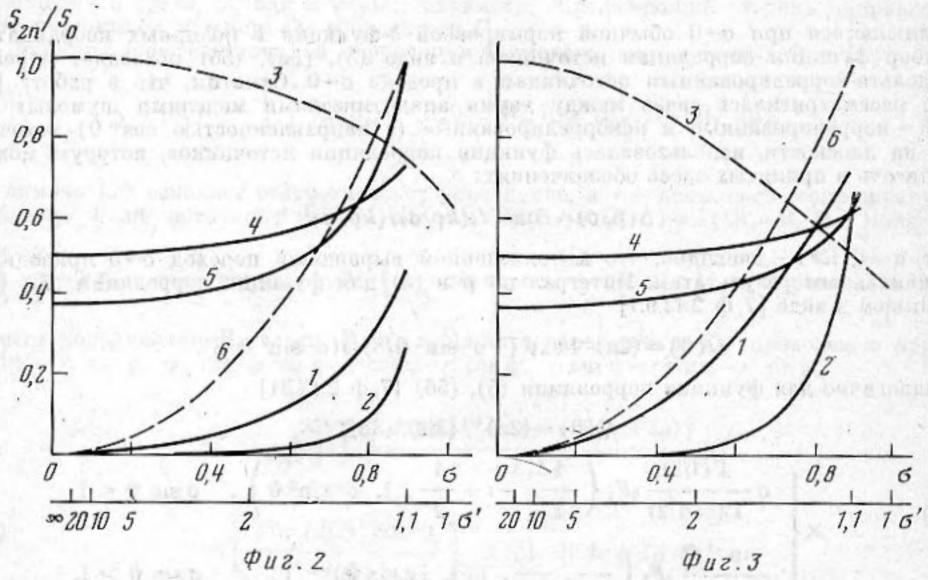
$$Q(\emptyset) = (2\pi)^{-1} \begin{cases} \frac{2}{\pi} E(P), & P < 1, \\ \frac{2}{\pi} P[E(1/P) - (1-P^{-2})K(1/P)], & P > 1, \end{cases} i = 1$$

$$\begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{3} [(P^2 - 1)K(P) - 2(P^2 - 2)E(P)], & P < 1, \\ \frac{2}{\pi} \frac{1}{3} [(1-P^{-2})(2-3P^{-2})K(1/P) - 2(1-2P^{-2})E(1/P)], & P > 1 \end{cases} i = 2.$$

 $[\]overline{}^{1}$ В аналогичном выражении (i=1), приведенном в [7, ф. 2. 12. 31], допущена ошибка.



Фиг. 1. Зависимость коэффициентов разложения от радиуса корреляции источников для модели источников (5), (5a): $1-S_2(\sigma)/S_0(\sigma)$; $2-S_4(\sigma)/S_0(\sigma)$; $3-S_6(\sigma)/S_0(\sigma)$; $4-S_0(\sigma)/S_0(0)$



Фиг. 2. Зависимость коэффициентов разложения от радиуса корреляции источников для модели источников (5), (5б) при i=1: $1-S_2(\sigma)/S_0(\sigma)$, P<1; $2-S_4(\sigma)/S_0(\sigma)$, P<1; $3-S_0(\sigma)/S_0(0)$, P<1; $4-S_2(\sigma')/S_0(\sigma')$, P>1; $5-S_4(\sigma')/S_0(\sigma')$, P>1; $6-S_0(\sigma')/S_0(\sigma')$, P>1

Фиг. 3. Зависимость коэффициентов разложения от радиуса корреляции источников для модели источников (5), (5б) при i=2: $1-S_2(\sigma)/S_0(\sigma)$, P<1; $2-S_4(\sigma)/S_0(\sigma)$, P<1; $3-S_0(\sigma)/S_0(0)$, P<1; $4-S_2(\sigma')/S_0(\sigma')$, P>1; $5-S_4(\sigma')/S_0(\sigma')$, P>1; $6-S_0(\sigma')/S_0(\sigma')$, P>1; $S_0(\sigma')/S_0(\sigma')$, $S_0(\sigma')/S_0(\sigma')$, $S_0(\sigma')/S_0(\sigma')$, $S_0(\sigma')/S_0(\sigma')$

Представим $Q(\vartheta)$ в виде следующего ряда:

$$Q(\vartheta) = (2\pi)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n} \cos^{2n} \vartheta,$$
 (7)

первые четыре коэффициента которого для (ба) имеют вид

$$S_0 = I_0(\sigma), S_2 = -\sigma I_1(\sigma), S_4 = \sigma^2 [I_0(\sigma) - I_1(\sigma)/\sigma]/2,$$

$$S_6 = \sigma^3 [I_0(\sigma)/\sigma - (1 + 2/\sigma^2)I_1(\sigma)]/6,$$
(8a)

где $I_i(...)$ — модифицированная функция Бесселя 1-го рода. Приведем также явный вид первых двух коэффициентов разложения для (6в):

$$S_{0} = \frac{2}{\pi} \left\{ E(\sigma), & P < 1, \\ \sigma[E(1/\sigma) - (1 - \sigma^{-2})K(1/\sigma)], & P > 1, \\ S_{2} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{[K(\sigma) - E(\sigma)]/2, & P < 1, \\ \sigma[K(1/\sigma) - E(1/\sigma)]/2, & P > 1, \\ \end{bmatrix} i = 1,$$
 (86)

$$S_{0} = \frac{2}{\pi} \left\{ \begin{cases} [(\sigma^{2}-1)K(\sigma) - 2(\sigma^{2}-2)E(\sigma)]/3, & P < 1, \\ \sigma[(1-\sigma^{-2})(2\sigma^{2}-3)K(1/\sigma) - 2(\sigma^{2}-2)E(1/\sigma)]/3, & P > 1, \end{cases} \right\} i=2. \quad (8b)$$

$$S_{2} = \frac{2}{\pi} \left\{ \begin{cases} [(2\sigma^{2}-1)E(\sigma) + (1-\sigma^{2})K(\sigma)]/2, & P < 1, \\ \sigma[(2\sigma^{2}-1)E(1/\sigma) + 2(1-\sigma^{2})K(1/\sigma)]/2, & P > 1, \end{cases} \right\} i=2. \quad (8b)$$

Смысл коэффициентов S_{2n} проясияется при подстановке (7) в (4). Легко видеть, что в этом случае все энергетические характеристики шумового поля, создаваемого коррелированными источниками с направленностью $\cos^{2m} \vartheta$, можно интерпретировать как суперпозицию соответствующих характеристик, создаваемых некими виртуальными некоррелированными источниками с направленностью $\cos^{2m+2n} \vartheta$, вклад которых определяется S_{2n} . Так, разложения по степеням $\cos \vartheta$ направленности — $G(\vartheta)$ и интенсивности — $\Gamma(0,z)$ шумового поля имеют вид

$$G(\vartheta) = 2\pi \exp(-\gamma z \sec \vartheta) \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n} \cos^{2m+2n-1} \vartheta, \qquad \Gamma(0,z) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n} E_{2m+2n+1}(\gamma z),$$
(9)

где $E_n(...)$ — интегральная показательная функция [8].

На фиг. 1—3 представлены зависимости коэффициентов разложения S_{2n} от параметра σ , который, как видно из (5a), (5б), естественно называть радиусом корреляции источников; при P>1 приведенные на фиг. 2—3 зависимости построены от аргумента σ' . Сравнение кривых, приведенных на фиг. 1—3, показывает существенное различие представленных зависимостей при $\sigma\approx 1$. Отметим, что при $\sigma=1$ разложение вида (7) несправедливо для (6a), поскольку в разложении по ϑ в (6в) при i=1, начиная со второго, а при i=2, начиная с третьего члена, присутствуют слагаемые вида const_l cos^l ϑ (1n(cos ϑ)+const_l'). При мелко-($\sigma\approx 0$) и крупномасштабной ($\sigma\gg 1$) структуре источников качественное поведение приведенных зависимостей оказывается схожим; при $\sigma\to 0$ из (8a), (8б) следует $S_{2n}\to \delta_{n,0}$ — символ Кронекера, что согласуется с результатами работ [1—4], при $\sigma\gg 1$ из (8a) можно получить $S_2/S_0=\frac{1}{2}+O(\sigma^{-2}),\ S_4/S_0=\frac{3}{8}+O(\sigma^{-2}),\ S_6/S_0=\frac{5}{16}+O(\sigma^{-2})$. По крайней мере справед-

ливость первых двух асимптотик для (8б) можно показать при дополнительном условии P>1. Таким образом, как следует из анализа формулы (9), существенное различие угловой структуры поля при $\sigma\approx0$ и $\sigma\gg1$ дает возможность решения обратной задачи в рамках рассматриваемой модели — определение статистической структуры источников по анизотропии наблюдаемого поля: наличие в разложении по степеням $\cos\vartheta$ у функции $R\equiv G(\vartheta)\exp(\gamma z\sec\vartheta)$ отличного от нуля только первого члена разложения указывает на мелкомасштабную структуру источников, если же в разложении R отличны от нуля и последующие члены разложения, это указывает на крупномасштабную структуру источников.

Представляется следующая схема определения характеристик источников наблюдаемого поля излучения: определение статистической структуры источников шумового поля по анизотропии и далее [2] определение направленности элементар-

ного источника при мелкомасштабной структуре источников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cron B. F., Sherman C. H. Spatial-correlation functions for various noise models.— JASA, 1962, v. 34, № 11, p. 1732-1736.

 Фурдуев А. В. Шумы океана.— В кн.: Акустика океана/Под ред. Бреховских Л. М. М.: Наука, 1974.

 Lieggett W. S., Jacobson M. J. Covariance of noise in attenuating media.— JASA, 1964, v. 36, № 6, p. 1183—1194.

4. Тоноян И. П. О пространственной корреляции поля излучения случайных поверхностных источников в поглощающей среде.— Акуст. журн., 1985, т. 31, № 3.

5. Курьянов Б. Ф. Пространственная корреляция полей излученных случайными источниками на плоскости.— Акуст. журн., 1963, т. 9, № 4, с. 441—448.

 Liggett W. S., Jacobson M. J. Covariance of surface generated noise in a deep ocean.— JASA, 1965, v. 38, № 4, p. 303-312.

7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.

8. Справочник по специальным функциям/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979.

I KENTONIA TOMOTTOWNE DESCRIPTION IN

Поступило в редакцию 11.V.1985