АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXII 1986 Вып. 4

УДК 534.26

ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ВОЛНЫ, РАССЕЯННОЙ ЭЛЕМЕНТОМ РЕБРА [1]

Буторин Д. И., Уфимцев П. Я.

Получены явные асимптотические выражения для акустической краевой волны, рассеянной окрестностью бесконечно малого элемента ребра на поверхности клина. Эта волна названа элементарной краевой волной. Изучены ее свойства. Результаты работы могут быть использованы для решения задач дифракции акустических волн на трехмерных поверхностях с изломами (ребрами).

В статье исследуется элементарная краевая волна (ЭКВ), рассеянная окрестностью бесконечно малого элемента ребра. Эта окрестность располагается на двух бесконечно узких полосках, принадлежащих поверхности клина и ориентированных вдоль дифракционных лучей. Волновое поле (потенциал скоростей) удовлетворяет на гранях клина условиям Дирихле ($u=0$) или условиям Неймана ($\partial u/\partial n=0$). ЭКВ является частью поля, рассеянного всем клином, и вычисляется по формулам Гельмгольца. Полученные для нее асимптотические выражения могут быть использованы для решения трехмерных дифракционных задач методом краевых волн [1].

Падающую на клин плоскую волну зададим в виде $u=\exp\{-ik[z\cos\gamma_0+\rho\sin\gamma_0\cos(\varphi-\varphi_0)]-i\omega t\}$, где углы γ_0 и φ_0 определяют направление прихода волны, ρ, φ, z — цилиндрические координаты точки наблюдения, ω — угловая частота, t — время, $k=2\pi/\lambda$ — волновое число. Будем далее считать, что $0<\gamma_0<\pi$, $0<\varphi_0<\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$, $\pi<\alpha\leqslant2\pi$, где α — внешний угол клина. Через u и v обозначим поля, рассеянные клином соответственно в случае граничных условий $u=0$ или $\partial u/\partial n=0$. На поверхности клина выделим две бесконечно узкие полоски, ориентированные под произвольным углом $\psi(0<\psi<\pi)$ к ребру клина (фиг. 1). Обозначим через du_1, dv_1 вклад, вносимый в рассеянное поле полоской, которая принадлежит к грани *1* ($\varphi=0$), и через du_2, dv_2 — аналогичный вклад от полоски, расположенной на грани *2* ($\varphi=\alpha$).

Для исследования этих полей введем три местные системы координат, связанные с полосками и имеющие общее начало в точке пересечения полосок ($z=\zeta$) на ребре клина. Две из них (x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2) являются декартовыми. Оси x_1, x_2 ориентированы вдоль полосок. Ось y_1 направлена вдоль внешней нормали $\mathbf{n}_1$ к грани *1*, ось y_2 направлена в сторону, противоположную внешней нормали $\mathbf{n}_2$ к грани *2*. Третья система координат R, β_1, β_2 включает в себя вектор $\mathbf{R}$, проведенный из начала координат в точку наблюдения, и углы β_1, β_2 между вектором $\mathbf{R}$ и осями x_1, x_2. Угол между вектором $\mathbf{R}$ и осью z основной цилиндрической системы координат обозначим через ϑ (фиг. 1).

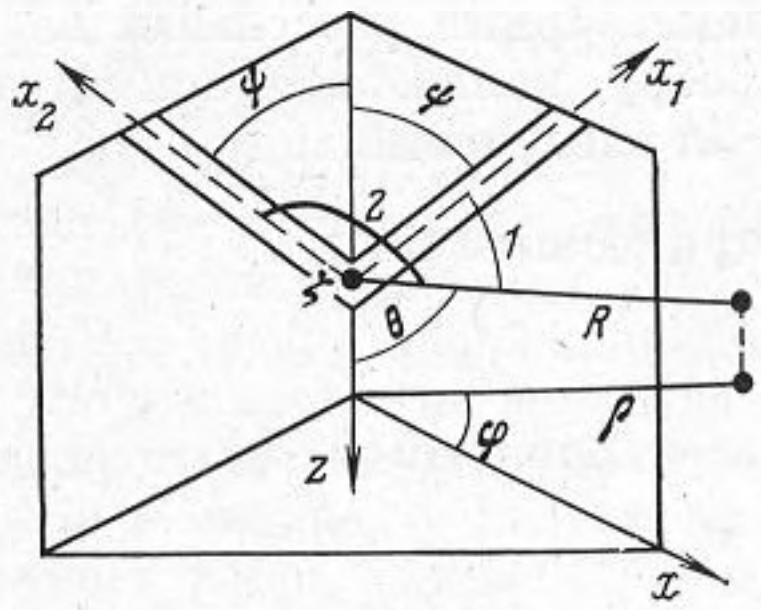
Согласно формулам Гельмгольца,

$$du_1=-\frac{d\zeta}{4\pi}\sin\psi\int_0^\infty\frac{\partial u}{\partial n_1}\frac{e^{ikr_1}}{r_1}d\xi_1,\qquad du_2=-\frac{d\zeta}{4\pi}\sin\psi\int_0^\infty\frac{\partial u}{\partial n_2}\frac{e^{ikr_2}}{r_2}d\xi_2,$$

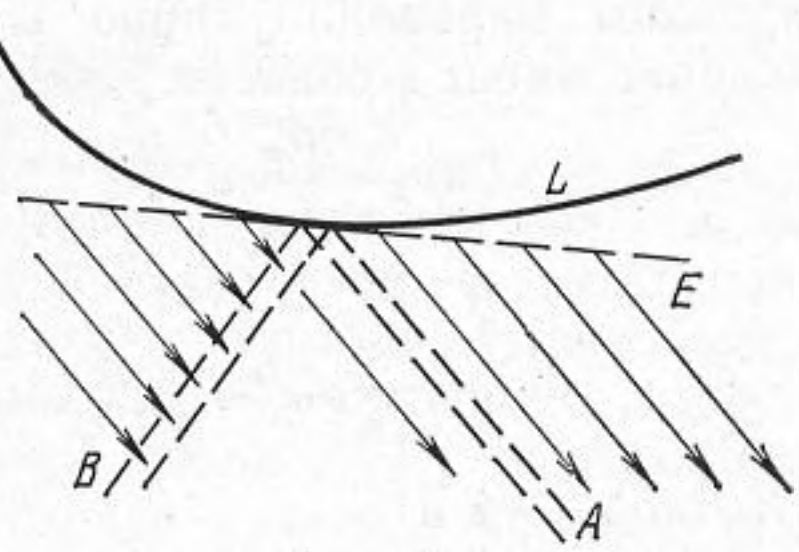
$$dv_1=-\frac{d\zeta}{4\pi}\sin\psi\int_0^\infty v\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{e^{ikr_1}}{r_1}d\xi_1,\qquad dv_2=\frac{d\zeta}{4\pi}\sin\psi\int_0^\infty v\frac{\partial}{\partial y_2}\frac{e^{ikr_2}}{r_2}d\xi_2,\tag{1}$$

[1] Доложено на симпозиуме по дифракции волн. Телави, 30.XI.1985 г.

где $d\zeta$ — элемент длины ребра, $r_1=[(x_1-\xi_1)^2+y_1^2+(z_1-\zeta_1)^2]^{1/2}$ и $r_2=[(x_2-\xi_2)^2+y_2^2+(z_2-\zeta_2)^2]^{1/2}$. Отметим, что величины du_2, dv_2 могут быть вычислены по формулам для du_1, dv_1, если в последних заменить φ_0 на $\alpha-\varphi_0$, y_1 на $-y_1$, r_1 на r_2. В соответствии с методом краевых волн [1] значения v и $\partial u/\partial n$ на поверхности клина можно формально рассматривать как «поверхностные токи». Эти токи условно разделяются на две части — равномерную (геометрооптическую) и неравномерную (дифракционную). В рассматриваемой задаче о клине неравномерная часть тока выражается через специальные контурные интегралы в комплексной плоскости [1].



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Элемент клина. Вдоль осей x_1, x_2 ориентированы бесконечно узкие рассеивающие полоски. В точке $z=\zeta$ находится начало местной системы координат R, β_1, β_2. Угол β_1 обозначен цифрой 1, а угол β_2 — цифрой 2. В точке $z=0$ — начало цилиндрической системы координат ρ, φ, z

Фиг. 2. L — ребро рассеивающей поверхности. E — ребро касательного клина. Стрелками показаны дифракционные лучи. A и B — две элементарные рассеивающие полоски. Только полоска A удовлетворяет принципу локальности. Поле на полоске B создается лучами, приходящими от фиктивных элементов ребра

В частности, на грани клина $\varphi=0$ эта часть тока определяется формулами

$$v=\frac{1}{2\alpha}e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}\int\limits_D e^{ik\mu\xi_1}[w^{-1}(\eta+\varphi_0)+w^{-1}(\eta-\varphi_0)]d\eta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_1}=\frac{ik\sin\gamma_0}{2\alpha}e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}\int\limits_D e^{ik\mu\xi_1}[w^{-1}(\eta+\varphi_0)-w^{-1}(\eta-\varphi_0)]\sin\eta\,d\eta. \tag{2}$$

Здесь $\mu=\cos\gamma_0\cos\psi-\sin\gamma_0\sin\psi\cos\eta$, $w(x)=1-\exp(i\pi x/\alpha)$, а контур интегрирования D, состоящий из двух ветвей, показан на фиг. 3 в книге [1].

Примем обозначения: $du^{(0)}$, $dv^{(0)}$ — поля, излучаемые равномерной частью тока; du, dv — поля, излучаемые неравномерной частью тока; $du^{(t)}=du^{(0)}+du$, $dv^{(t)}=dv^{(0)}+dv$ — поля, излучаемые полным током. Сосредоточим внимание на полях du, dv, которые излучаются неравномерной частью тока. Вдали от ребра эта часть тока на каждой полоске имеет фазовую скорость $v_\Phi=c/\cos(\psi-\gamma_0)$, которая превышает скорость волны c в однородной среде. Поэтому каждую элементарную рассеивающую полоску можно рассматривать как линейную антенну с быстрой бегущей волной. Как известно, такая антенна создает максимальное излучение на конусе $\beta_{1,2}=\beta_c=\arccos(c/v_\Phi)$. Это явление аналогично эффекту Черенкова, относящемуся к излучению сверхсветового электрона. Исходя из приведенных выше формул Гельмгольца, можно показать, что в случае граничных условий Неймана поле $dv_{1,2}$ на таком конусе имеет величину порядка $(kR)^{-3/4}$, т. е. в $(kR)^{1/4}$ раз превышает по амплитуде обычную сферическую волну. Вне конуса ($\beta_{1,2}>\beta_c$) вдали от его поверхности ($kR(\beta_{1,2}-\beta_c)^2\gg1$) поле $dv_{1,2}$ представляет собой сферическую волну, исходящую из точки $z=\zeta$ на ребре клина. Внутри конуса ($\beta_{1,2}<\beta_c$) вдали от его поверхности поле $dv_{1,2}$ состоит из суммы двух волн. Одна из них — это сферическая

краевая волна, другая — гибридная волна. У гибридной волны амплитуда убывает с удалением от ребра как $(kR)^{-1}$, т. е. как у обычной сферической волны. А ее фазовый фронт является коническим, нормаль к которому есть $\operatorname{grad}[R\cos(\beta_c-\beta_{1,2})]$. Представление поля $dv_{1,2}$ в виде сферических и гибридных волн неприменимо вблизи конусов $\beta_{1,2}=\beta_c$. Здесь поле имеет более сложную структуру и описывается функциями Ханкеля с индексом $^1/_4$. С помощью обобщенного метода перевала авторами получено равномерное асимптотическое представление (при $kR\gg1$) для поля dv, содержащее указанные функции Ханкеля и справедливое при любых углах наблюдения $\beta_{1,2}$.

В частности, при $\psi=\pi/2$, когда элементарные рассеивающие полоски ориентированы перпендикулярно к ребру клина, это асимптотическое представление имеет в области $\beta_c\leqslant\beta_{1,2}<\pi$ следующий вид

$$dv_1=\frac{d\zeta}{4\pi}e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}L(\beta_1,\varphi_0)\sin\vartheta\sin\varphi,$$

$$dv_2=\frac{d\zeta}{4\pi}e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}L(\beta_2,\alpha-\varphi_0)\sin\vartheta\sin(\alpha-\varphi). \tag{3}$$

Здесь $kR\sin^2\beta_{1,2}\gg1$ и

$$L(\beta,\varphi_0)=-2[c_0(\beta,\varphi_0)+c_1(\sigma,\varphi_0)]\frac{e^{ikR}}{R}-$$

$$-i\left[\frac{k\pi(\cos\beta_c-\cos\beta)}{2R}\right]^{1/2}e^{-i\pi/8}\frac{c_2(\sigma,\varphi_0)}{\Omega\sin\beta}e^{-i2\varkappa^2}H^{(1)}_{1/4}(2\varkappa^2)e^{ikR},$$

где

$$c_0(\beta,\varphi_0)=-\varepsilon(\varphi_0)(\cos\beta+\sin\gamma_0\cos\varphi_0)^{-1},$$

$$c_1(\sigma,\varphi_0)=\frac{c(\sigma,\varphi_0)-c(2\pi-\sigma,\varphi_0)}{2(\cos^2\beta_c-\cos^2\beta)^{1/2}},\qquad c_2(\sigma,\varphi_0)=$$

$$=\frac{c(\sigma,\varphi_0)+c(2\pi-\sigma,\varphi_0)}{2(\cos\beta_c+\cos\beta)^{1/2}},\qquad c(\sigma,\varphi_0)=\frac{\pi}{2\alpha}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma+\varphi_0)}{2\alpha}+\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma-\varphi_0)}{2\alpha}\right].$$

Величины σ и $\varkappa$ определяются соотношениями

$$\sigma=\pi-\arccos(\cos\beta/\cos\beta_c)\ \text{ при } \beta_c\leqslant\beta\leqslant\pi-\beta_c,$$

$$\sigma=i\ln\{[-\cos\beta+(\cos^2\beta-\cos^2\beta_c)^{1/2}]/\cos\beta_c\}\ \text{ при } \pi-\beta_c\leqslant\beta\leqslant\pi,$$

$$\varkappa=\left(\frac{kR}{8}\right)^{1/2}\frac{\cos\beta_c-\cos\beta}{\Omega\sin\beta},\qquad \Omega^2=1-(2\tau^2\cos\beta+\tau^4)/\sin^2\beta,$$

где $\tau=(\cos\beta_c-\cos\beta)^{1/2}$ и $\beta_c=|\pi/2-\gamma_0|$, $\cos\beta_c=\sin\gamma_0$. Параметр $\varepsilon(\varphi_0)$, входящий в величину $c_0(\beta,\varphi_0)$, определяется как $\varepsilon(\varphi_0)=1$ при $0<\varphi_0<\pi$ и $\varepsilon(\varphi_0)=0$ при $\varphi_0>\pi$. Асимптотические выражения для полей $dv_1^{(t)}$, $dv_2^{(t)}$ вытекают из приведенных выше формул, если у функции $L(\beta,\varphi_0)$ отбросить в первой строке в квадратных скобках слагаемое $c_0(\beta,\varphi_0)$. В области $0<\beta\leqslant\beta_c$ асимптотики полей dv_1, dv_2 и $dv_1^{(t)}$, $dv_2^{(t)}$ выражаются через функции Ханкеля $H^{(1)}_{1/4}$ и $H^{(2)}_{1/4}$.

В случае граничных условий Дирихле ($u=0$) неравномерная часть тока на рассеивающих полосках убывает с удалением от ребра как $(kR)^{-3/2}$, т. е. на порядок (по kR) быстрее, чем в случае граничных условий Неймана. В связи с этим первый член асимптотического разложения для поля du представляет собой всюду при $kR\gg1$ сферическую краевую волну. Эффект концентрации волнового поля на конусе $\beta_{1,2}=\beta_c$ проявляется только в следующих членах асимптотического разложения. Вдали от поверхности конуса β_c второй член асимптотики для du имеет величину порядка $(kR)^{-2}$. А на конусе $\beta_{1,2}=\beta_c$ он порядка $(kR)^{-5/4}$. Вне конуса ($\beta_{1,2}>\beta_c$) вдали от его поверхности этот член асимптотики представляет собой волну со сферическим фронтом. Внутри конуса ($\beta_{1,2}<\beta_c$) вдали от его поверхности вто-

рой член асимптотики состоит из двух слагаемых. Одно из них соответствует волне со сферическим фронтом типа $R^{-2}\exp(ikR)$, а второе слагаемое — гибридной волне типа $R^{-2}\exp[ikR\cos(\beta_{1,2}-\beta_c)]$.

Сферическую краевую волну, содержащуюся в полях du, dv и расходящуюся от пересечения полосок ($z=\zeta$), назовем элементарной краевой волной (ЭКВ). Отметим некоторые ее свойства. Напомним сначала, что она представляет собой разность полей, создаваемых порознь полным током и его равномерной частью: $du=du^{(t)}-du^{(0)}$, $dv=dv^{(t)}-dv^{(0)}$. В направлениях дифракционных лучей Рубиновича — Келлера ($\vartheta=\pi-\gamma_0$) в области вне клина ($0<\varphi<\alpha$) поля $du^{(t)}$, $dv^{(t)}$ не зависят от ориентации полосок (от угла ψ) и выражаются через известные функции $f(\varphi, \varphi_0, \alpha)$, $g(\varphi, \varphi_0, \alpha)$, которые описывают полные краевые волны, расходящиеся от бесконечного ребра клина [1]. Внутри клина ($\alpha<\varphi<2\pi$) в направлениях дифракционных лучей ($\vartheta=\pi-\gamma_0$) слагаемые $du^{(t)}$, $dv^{(t)}$ обращаются в нуль. Этот результат является следствием экранировки внутренней области клина его гранями. Всюду вне дифракционного конуса ($\vartheta\neq\pi-\gamma_0$) все ЭКВ определяются неоднозначно: их величина зависит от выбора угла ψ, под которым ориентированы рассеивающие полоски. Это обстоятельство, несущественно только в задаче о полной краевой волне $u^{(t)}$, $v^{(t)}$, расходящейся от бесконечного ребра клина. В этом случае интеграл по всем ЭКВ вдоль ребра дает для $u^{(t)}$, $v^{(t)}$ выражения, которые не зависят от угла ψ. Однако вопрос о выборе этого угла приобретает принципиальное значение при решении дифракционных задач для поверхностей с искривленными (непрямолинейными) ребрами.

Однозначно определить ЭКВ позволяет следующий принцип локальности. В качестве элементарной рассеивающей полоски следует выбирать такую полоску, в каждой точке которой поле определяется краевой волной, приходящей от собственного элемента ребра данной полоски. Оказывается, что таким свойством обладает только полоска, ориентированная вдоль дифракционного луча ($\psi=\gamma_0$). Действительно, при любых других ориентациях полоски поле на ней будет определяться краевыми волнами (дифракционными лучами), приходящими от «чужих» элементов ребра. Очевидно, что в случае искривленного ребра L такие «чужие» элементы ребра являются фиктивными, т. е. несуществующими реально (фиг. 2). Поэтому любой другой выбор ориентации полоски, кроме $\psi=\gamma_0$, оказывается абсурдным с физической точки зрения.

Заметим, что ЭКВ, рассеянные полосками, ориентированными вдоль дифракционных лучей, обладают замечательным свойством. Неравномерная часть тока на таких полосках имеет фазовую скорость равную c. Поэтому дифракционный конус $\beta_{1,2}=\beta_c$ в данном случае совпадает с самой рассеивающей полоской. Следовательно, ЭКВ du, dv всюду вне полоски оказываются обычными сферическими волнами, которые не имеют никаких особенностей. Ниже приводится вывод асимптотических выражений для таких ЭКВ и обсуждаются их некоторые свойства.

Итак, полагаем угол $\psi=\gamma_0$ и ориентируем элементарные рассеивающие полоски вдоль дифракционных лучей. Выражения (2) для неравномерной части тока подставим в формулы Гельмгольца (1) и проведем в них следующие преобразования. Для функции Грина и ее производной воспользуемся интегральными представлениями

$$\frac{e^{ikr_1}}{r_1}=\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ip(x_1-\xi_1)}H_0^{(1)}(qh_1)\,dp,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{e^{ikr_1}}{r_1}=-\frac{iy_1}{2h_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ip(x_1-\xi_1)}qH_1^{(1)}(qh_1)\,dp,$$

где $h_1=[y_1^2+(z_1-\zeta_1)^2]^{1/2}$, $q=(k^2-p^2)^{1/2}$, $\operatorname{Im} q\geqslant 0$, $H_0^{(1)}$ и $H_1^{(1)}$ — функции Ханкеля. Разрезы на комплексной плоскости (p) проводятся по отрезкам вещественной оси $-\infty\leqslant\operatorname{Re}(p)\leqslant -k$, $k\leqslant\operatorname{Re}(p)\leqslant\infty$. Контур интегрирования

огибает точку $p=-k$ сверху, а точку $p=k$ — снизу. Эти интегральные представления подставляются в формулы Гельмгольца. В получившихся трехкратных интегралах изменяется порядок интегрирования и вычисляется в явном виде интеграл по ξ_1. Затем в интеграле по η замыкаются на бесконечности ($\eta\to\pm i\infty$) ветви контура D. К интегралу по такому замкнутому контуру применяется теорема о вычетах. В результате получаем

$$du_1=-i\frac{d\zeta}{4\pi}e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}\sin^2\gamma_0\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ipx_1}H_0^{(1)}(qh_1)\,U(\sigma,\varphi_0)\,dp,$$

$$dv_1=\frac{d\zeta}{4\pi}e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}\frac{y_1\sin\gamma_0}{kh_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ipx_1}qH_1^{(1)}(qh_1)\,V(\sigma,\varphi_0)\,dp,$$

где

$$\cos\sigma=-(p-k\cos^2\gamma_0)/k\sin^2\gamma_0 \quad \text{и}$$

$$U(\sigma,\varphi_0)=\frac{\pi}{2\alpha\sin^2\gamma_0}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma+\varphi_0)}{2\alpha}-\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma-\varphi_0)}{2\alpha}\right]+$$

$$+\frac{\varepsilon(\varphi_0)k\sin\varphi_0}{p-k\cos^2\gamma_0+k\sin^2\gamma_0\cos\varphi_0},$$

$$V(\sigma,\varphi_0)=\frac{\pi}{2\alpha\sin^2\gamma_0\sin\sigma}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma+\varphi_0)}{2\alpha}+\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma-\varphi_0)}{2\alpha}\right]-$$

$$-\frac{\varepsilon(\varphi_0)k}{p-k\cos^2\gamma_0+k\sin^2\gamma_0\cos\varphi_0}.$$

Параметр $\varepsilon(\varphi_0)$ определен выше в связи с формулами (2). Функции Ханкеля заменяются их асимптотикой для значений $|qh_1|\gg1$. После чего интегралы (4) вычисляются приближенно методом стационарной фазы. Окончательные формулы для ЭКВ, излучаемых неравномерной частью тока, имеют вид

$$du=du_1+du_2=\frac{d\zeta}{2\pi}e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}F_u(\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikR}}{R},$$

$$dv=dv_1+dv_2=\frac{d\zeta}{2\pi}e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}F_v(\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{5}$$

где функции F_u, F_v представляют собой диаграммы направленности ЭКВ и определяются в области $kR\sin^2\beta_{1,2}\gg1$ следующими соотношениями:

$$F_u=-[U(\sigma_1,\varphi_0)+U(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)]\sin^2\gamma_0,$$

$$F_v=-[V(\sigma_1,\varphi_0)\sin\varphi+V(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)\sin(\alpha-\varphi)]\sin\gamma_0\sin\vartheta. \tag{6}$$

Здесь

$$U(\sigma_1,\varphi_0)=U_t(\sigma_1,\varphi_0)-U_0(\beta_1,\varphi_0),\qquad V(\sigma_1,\varphi_0)=$$

$$=V_t(\sigma_1,\varphi_0)-V_0(\beta_1,\varphi_0),\qquad U(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)=U_t(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)-$$

$$-U_0(\beta_2,\alpha-\varphi_0),\qquad V(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)=V_t(\sigma_2,\alpha-\varphi_0)-V_0(\beta_2,\alpha-\varphi_0),$$

$$\cos\beta_1=\sin\vartheta\sin\gamma_0\cos\varphi-\cos\vartheta\cos\gamma_0,\qquad \cos\beta_2=$$

$$=\sin\vartheta\sin\gamma_0\cos(\alpha-\varphi)-\cos\vartheta\cos\gamma_0.$$

Выражения для функций U_t, V_t, U_0, V_0 запишем, опуская нижние индексы у величин $\sigma_{1,2}$ и $\beta_{1,2}$:

$$U_t(\sigma,\varphi_0)=\frac{\pi}{2\alpha\sin^2\gamma_0}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma+\varphi_0)}{2\alpha}-\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma-\varphi_0)}{2\alpha}\right],$$

$$V_t(\sigma,\varphi_0)=\frac{\pi}{2\alpha\sin^2\gamma_0\sin\sigma}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma+\varphi_0)}{2\alpha}+\operatorname{ctg}\frac{\pi(\sigma-\varphi_0)}{2\alpha}\right]$$

$$V_0(\beta, \varphi_0)=\varepsilon(\varphi_0)(\cos\beta-\cos^2\gamma_0+\sin^2\gamma_0\cos\varphi_0)^{-1},$$

$$U_0(\beta, \varphi_0)=-V_0(\beta, \varphi_0)\sin\varphi_0,$$

где $\varepsilon(x)=1$ при $0<x<\pi$, $\varepsilon(x)=0$ при $x>\pi$. Величина σ определяется соотношениями $\cos\sigma=(\cos^2\gamma_0-\cos\beta)/\sin^2\gamma_0$ и

$$\sigma=\pi-\arccos[(\cos\beta-\cos^2\gamma_0)/\sin^2\gamma_0] \quad \text{при} \quad 0\leqslant\beta\leqslant\beta_k,$$

$$\sigma=i\ln\{\cos^2\gamma_0-\cos\beta+[(\cos^2\gamma_0-\cos\beta)^2-\sin^4\gamma_0]^{1/2}\}-$$
$$-2i\ln(\sin\gamma_0) \quad \text{при} \quad \beta_k\leqslant\beta\leqslant\pi,$$

где $\beta_k=2\gamma_0$ при $0<\gamma_0\leqslant\pi/2$, $\beta_k=2(\pi-\gamma_0)$ при $\pi/2\leqslant\gamma_0<\pi$.

Заменяя в формулах (6) величины U, V на U_t, V_t или на U_0, V_0, получим соответственно выражения для $F_u^{(t)}$, $F_v^{(t)}$ или для $F_u^{(0)}$, $F_v^{(0)}$. Функции $F_{u,v}^{(t)}$ и $F_{u,v}^{(0)}$ суть диаграммы направленности ЭКВ, излучаемых порознь полным током или его равномерной (геометрооптической) компонентой. Обе эти функции $F^{(t)}$ и $F^{(0)}$ принимают бесконечно большие значения на конусах $\beta_1=\beta_{10}$ и $\beta_2=\beta_{20}$, где $\cos\beta_{10}=\cos^2\gamma_0-\sin^2\gamma_0\cos\varphi_0$, $\cos\beta_{20}=\cos^2\gamma_0-\sin^2\gamma_0\cos(\alpha-\varphi_0)$. Эти конусы можно условно назвать «геометрооптическими», поскольку на них находятся лучи, соответствующие геометрооптическим границам. На конусе $\beta_1=\beta_{10}$ лежат лучи $\vartheta=\pi-\gamma_0$, $\varphi=\pi+\varphi_0$ и $\vartheta=\pi-\gamma_0$, $\varphi=\pi-\varphi_0$. Первый из них лежит на границе света — тени, возникающей из-за затенения падающей плоской волны клином. Второй луч лежит на границе плоской волны, отраженной от грани клина $\varphi=0$. На конусе $\beta_2=\beta_{20}$ находится луч $\vartheta=\pi-\gamma_0$, $\varphi=2\alpha-\varphi_0-\pi$, который лежит на границе плоской волны, отраженной от грани клина $\varphi=2\alpha$. Однако ЭКВ, излучаемая неравномерной частью тока, остается ограниченной на этих «геометрооптических» конусах. Действительно, на конусе $\beta_1=\beta_{10}$, где $\sigma_1=\varphi_0$,

$$U(\varphi_0, \varphi_0)=-\frac{\operatorname{ctg}\varphi_0}{2\sin^2\gamma_0}+\frac{\pi}{2\alpha\sin^2\gamma_0}\operatorname{ctg}\frac{\pi\varphi_0}{\alpha}, \qquad V(\varphi_0, \varphi_0)=U(\varphi_0, \varphi_0)/\sin\varphi_0.$$

А на конусе $\beta_2=\beta_{20}$, где $\sigma_2=\alpha-\varphi_0$, ограничены функции $U(\sigma_2, \alpha-\varphi_0)$ и $V(\sigma_2, \alpha-\varphi_0)$. Заметим также, что функции $F_{u,v}$ и $F_{u,v}^{(t)}$ принимают только вещественные значения, хотя их аргументы $\sigma_{1,2}$ могут быть комплексными величинами.

Наиболее простыми оказываются выражения для ЭКВ в направлениях дифракционных лучей ($\vartheta=\pi-\gamma_0$):

$$du=\frac{d\zeta}{2\pi}e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}f^1(\varphi, \varphi_0\alpha)\frac{e^{ikR}}{R},$$
$$dv=\frac{d\zeta}{2\pi}e^{-ik\zeta\cos\gamma_0}g^1(\varphi, \varphi_0, \alpha)\frac{e^{ikR}}{R}. \tag{7}$$

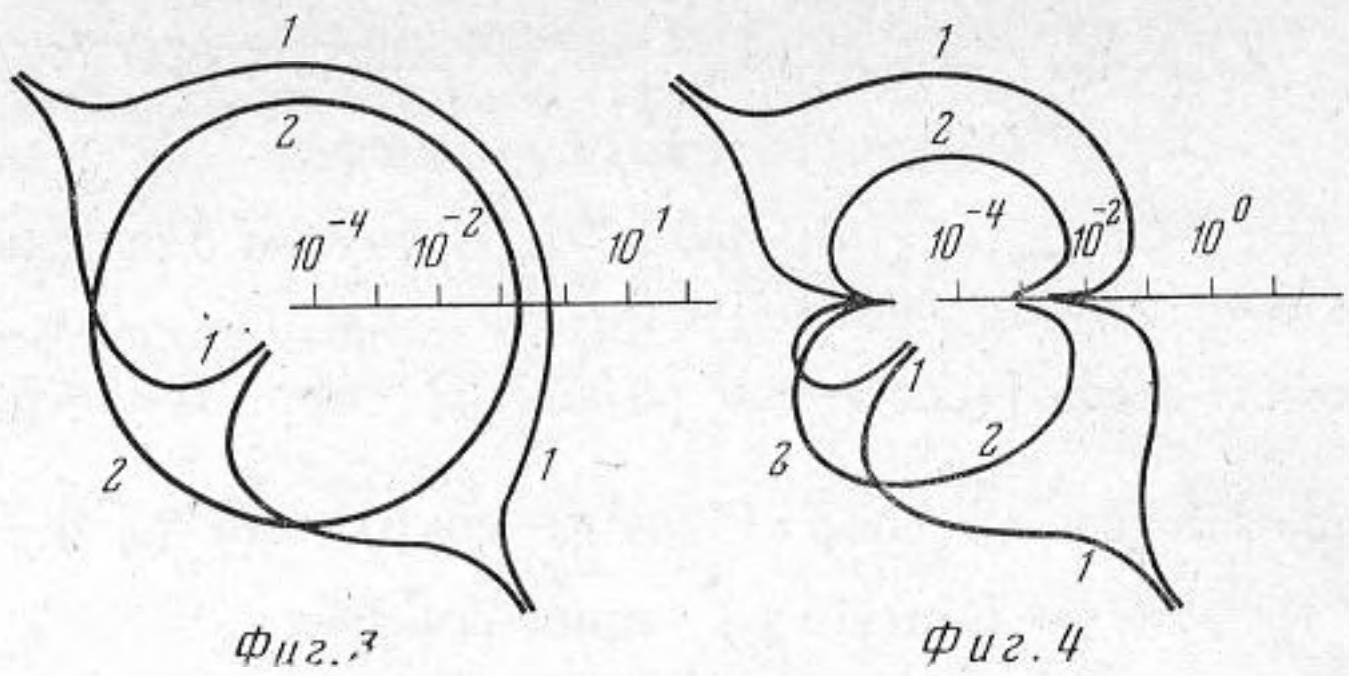
Здесь $f^1=f-f^0$, $g^1=g-g^0$,

$$\left.\begin{matrix} f(\varphi, \varphi_0, \alpha) \\ g(\varphi, \varphi_0, \alpha)\end{matrix}\right\}=\left(\frac{\pi}{\alpha}\sin\frac{\pi^2}{\alpha}\right)\left\{\left[\cos\frac{\pi^2}{\alpha}-\cos\frac{\pi(\varphi-\varphi_0)}{\alpha}\right]^{-1}\mp\right.$$
$$\left.\mp\left[\cos\frac{\pi^2}{\alpha}-\cos\frac{\pi(\varphi+\varphi_0)}{\alpha}\right]^{-1}\right\},$$

$$f^0(\varphi, \varphi_0, \alpha)=\frac{\varepsilon(\varphi_0)\sin\varphi_0}{\cos\varphi+\cos\varphi_0}+\frac{\varepsilon(\alpha-\varphi_0)\sin(\alpha-\varphi_0)}{\cos(\alpha-\varphi)+\cos(\alpha-\varphi_0)},$$

$$g^0(\varphi, \varphi_0, \alpha)=-\frac{\varepsilon(\varphi_0)\sin\varphi}{\cos\varphi+\cos\varphi_0}-\frac{\varepsilon(\alpha-\varphi_0)\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)+\cos(\alpha-\varphi_0)}.$$

Функции f^1, g^1 описывают диаграммы направленности краевой волны, излучаемой неравномерной частью тока. А функции f, g и f^0, g^0 — диаграммы краевых волн, излучаемых соответственно полным током и его равномер-



Фиг. 3 Фиг. 4

Фиг. 3. Диаграммы направленности элементарных краевых волн: *1* – функции $|F_u^{(t)}|$, *2* – функции $|F_u|$. Горизонтальная прямая – полярная ось. На верхней границе этой оси полярный угол ϑ равен 0°, а на нижней – $\vartheta=360°$
Фиг. 4. То же, что на фиг. 3: *1* – функции $|F_v^{(t)}|$, *2* – функции $|F_v|$

ной частью. Свойства этих функций изучены в [1]. Формулы (7) согласуются с результатом работы [2].

Поля ЭКВ в общем случае не удовлетворяют принципу взаимности, поскольку они представляют собой только часть полной краевой волны, рассеянной всем ребром клина. Лишь в частном случае, когда точка наблюдения попадает на конус дифракционных лучей ($\vartheta=\pi-\gamma_0$) поля $du^{(t)}$ и $dv^{(t)}$ удовлетворяют данному принципу. Это исключение не является случайным и обусловлено тем, что в направлениях $\vartheta=\pi-\gamma_0$ полная краевая волна, рассеянная всем ребром клина, фактически формируется совокупностью ЭКВ, выходящих из окрестности точки $z=\zeta$ на ребре клина, поскольку эта точка оказывается точкой стационарной фазы. Отметим еще, что внутри клина ($\alpha<\varphi<2\pi$) в направлениях дифракционных лучей ($\vartheta=\pi-\gamma_0$) параметры σ_1 и σ_2 принимают значения $\sigma_1=\varphi-\pi$ и $\sigma_2=\pi+\alpha-\varphi$. Поэтому здесь $du^{(t)}=0$ и $dv^{(t)}=0$, что является следствием экранировки внутренней области клина его гранями.

На фиг. 3, 4 построены в логарифмическом масштабе в полярных координатах графики функций $|F_{u,v}^{(t)}|$, $|F_{u,v}|$, рассчитанных для значений $\gamma_0=\varphi_0=45°$, $\alpha=315°$. Графики изображают диаграммы направленности ЭКВ в плоскости $\varphi=\alpha/2$, $\alpha/2+\pi$, рассекающей клин на две равные части. Полярный угол ϑ изменяется в пределах от 0 до 360°. Интервал $0\leqslant\vartheta\leqslant180°$ соответствует пространству вне клина ($\varphi=\alpha/2$), а интервал $180°<\vartheta<360°$ – пространству внутри клина ($\varphi=\alpha/2+\pi$). Максимальные значения функций $|F_{u,v}^{(t)}|$, указанные на графиках, равны 100. Эти максимумы лежат вблизи направлений $\beta_1=\beta_{10}$, где $|F_{u,v}^{(t)}|=\infty$. Минимумы функций $|F_{u,v}^{(t)}|$, расположенные при $\vartheta=225°$, соответствуют дифракционным лучам ($\vartheta=\pi+\gamma_0$) внутри клина, где $F_{u,v}^{(t)}=0$.

Полученные в статье результаты могут быть использованы при построении асимптотической теории электромагнитных краевых волн, расходящихся от бесконечно малого элемента ребра идеально проводящего клина. Задача о таких элементарных краевых волнах является существенно векторной и не сводится полностью к своему скалярному (акустическому) аналогу. Однако в ней также возникают интегралы типа (4), асимптотики которых изучены в данной работе.

В заключение авторы выражают благодарность Г. Д. Яковлевой за помощь в проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфимцев П. Я.* Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. радио, 1962.
2. *Уфимцев П. Я.* Геометрическая теория дифракции как асимптотическая форма метода краевых волн.– Кр. тексты докл. VII Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. Ростов н/Д. М.: 1977, № 1, с. 54–57.

Институт радиотехники и электроники
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
27.III.1985