АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXII 1986 Вып. 4

УДК 535.212

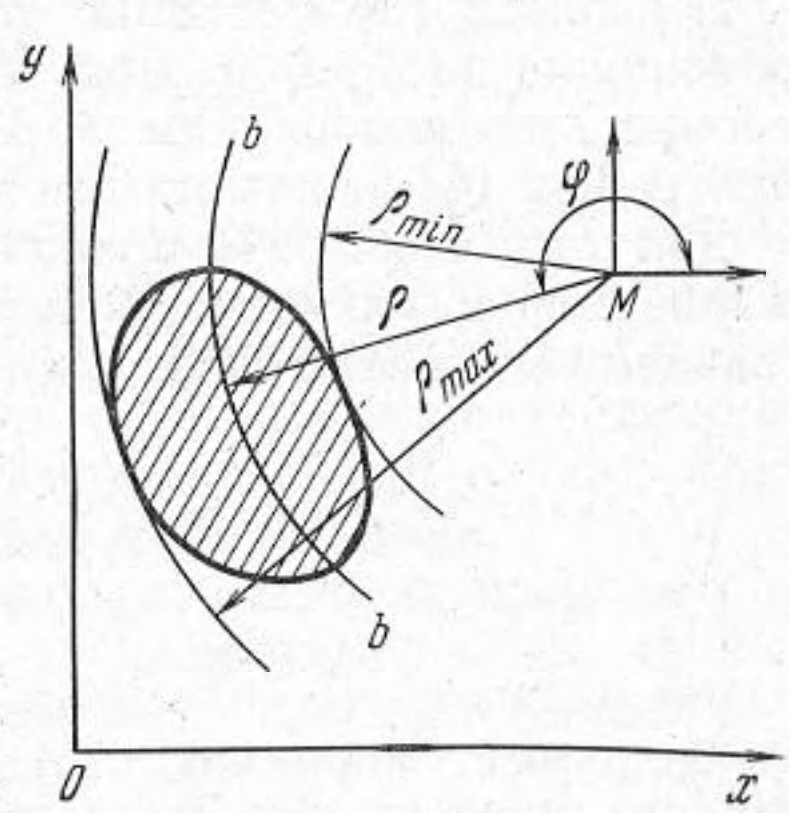
АКУСТИЧЕСКАЯ ТОМОГРАФИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ

Воробьев В. В., Грачева М. Е., Гурвич А. С.

По измерениям давления в расходящейся звуковой волне, генерируемой лазерным импульсом в слабопоглощающей жидкости или газе, предлагается восстанавливать распределение плотности энергии в поперечном сечении лазерного пучка. В общем случае, если акустические приемники расположены достаточно далеко от пучка, то восстановление может быть проведено методами вычислительной томографии.

Распространение лазерного импульса в поглощающей среде приводит к нагреву, изменению давления в нагретом объеме и как следствие этого — излучению звука [1]. В настоящей работе рассматривается задача о восстановлении плотности распределения энергии по сечению лазерного пучка на основе регистрации возбуждаемых им расходящихся звуковых волн.

Выберем систему координат так, что пучок распространяется в направлении оси z. Если длительность импульса τ мала, $\tau \ll a/u$, где a — характерный поперечный размер пучка, u — скорость звука, и время термализации поглощенной энергии τ_1 также мало, то за время τ можно пренебречь изменением объема.



Фиг. 1. Геометрия задачи. Заштриховано сечение пучка плоскостью $z=\text{const}$, в которой находится точка наблюдения M, bb — окружность радиуса ρ с центром в M, φ — угол между ρ и направлением оси x

На фиг. 1 представлена геометрия задачи. Если в начальный момент времени $t=0$ в среде за счет нагрева лазерным пучком создано некоторое распределение давления P_0, то в произвольный момент t в точку M приходят звуковые волны от источников, находящихся на сфере радиусом $\rho=ut$ с центром в точке M. Поэтому передний фронт акустического импульса регистрируется в момент $t_1=\rho_{\min}/u$, где $\rho_{\min}$ — минимальное расстояние от края пучка до точки наблюдения M, расположенной вне лазерного пучка. Для решения задачи о восстановлении плотности распределения энергии по сечению лазерного пучка достаточно зарегистрировать звуковое давление от момента t_1 до момента $t_2=\rho_{\max}/u$, так как приходящие позднее звуковые волны не несут дополнительной информации о восстанавливаемом распределении I. Источник звука можно считать цилиндрическим [2], если при $R \gg a$, $R=(\rho_{\max}+\rho_{\min})/2$ коэффициент поглощения лазерного излучения α удовлетворяет условию $\alpha \ll (2Ra)^{-1/2}$.

При этих условиях звуковое давление $P(M, t)$ в точке M, возбуждаемое импульсным нагревом в газе, описывается уравнением

$$\partial^2 P/dt^2=u^2(\partial^2 P/\partial x^2+\partial^2 P/\partial y^2) \tag{1}$$

с начальным условием

$$P(x, y, 0)=P_0(x, y)=\alpha\gamma^{-1}(\gamma-1)I(x, y), \tag{2}$$

где $\gamma=c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и по-

стоянном объеме, $I(x, y)$ — плотность распределения энергии лазерного пучка в плоскости $z=\text{const}$. Решение (1) с начальным условием (2) хорошо известно [3]:

$$P(M,t)=\frac{ut}{2\pi}\int\limits_0^{ut}\frac{d\rho}{(u^2t^2-\rho^2)^{1/2}}\frac{\partial w(\rho,M)}{\partial\rho}, \tag{3}$$

$$w(\rho,M)=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\, P_0(\rho\cos\varphi+x_M,\rho\sin\varphi+y_M), \tag{4}$$

где x_M, y_M — координаты точки M.

Уравнение (3) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно функции w, решение которого

$$w(\rho,M)=4u\int\limits_0^{\rho/u}P(M,t)\frac{dt}{(\rho^2-u^2t^2)^{1/2}} \tag{5}$$

явно выражает w через наблюдаемое в точке M звуковое давление P. Из (2), (4), (5) следует, что, измерив $P(M, t)$ при известных параметрах среды, можно вычислить полную энергию светового импульса:

$$E=\int\limits_{-\infty}^{\infty}I(x,y)\,dx\,dy=\frac{\gamma}{\alpha(\gamma-1)}\int\limits_0^{\infty}w(\rho,M)\rho\,d\rho. \tag{6}$$

Если измерения звукового давления проводятся в достаточно удаленных от пучка точках, то интегрирование по дуге окружности радиуса ρ в (4) области, где I отлично от нуля, можно считать эквивалентным интегрированию по прямой. При этом допущении можно восстановить распределение I по измерениям $P(M, t)$, пользуясь методами вычислительной томографии [4], основанными на преобразовании Радона.

Для того чтобы (4) приближенно записать как интеграл по прямой линии, введем в рассмотрение новую систему координат $\xi=x-x_0$, $\eta=y-y_0$ с началом в «центре тяжести» пучка в точке

$$x_0=E^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xI(x,y)\,dx\,dy,\qquad y_0=E^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}yI(x,y)\,dy\,dx. \tag{7}$$

Обозначив $P_0'(\xi, \eta)=P_0(x, y)$ — начальное распределение давления в новой системе координат, в (4) введем новую переменную интегрирования $s=\rho\,\mathrm{tg}\,\psi$, $\psi=\varphi-\alpha_M+\pi$, $\alpha_M=\mathrm{arctg}[(y_M-y_0)/(x_M-x_0)]$. Если расстояние R_M от точки наблюдения M до «центра тяжести» пучка велико $R_M\gg a$, то подынтегральное выражение в (4) быстро убывает до нуля при $\psi>a/R_M$, что позволяет при вычислении (4) считать $\cos\psi=1$ и $\sin\psi=\mathrm{tg}\,\psi$ с точностью $a^2/2R_M^2$. В результате получаем выражение

$$\rho w(\rho,M)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}P_0'(r_M\cos\alpha_M+s\sin\alpha_M,\qquad r_M\sin\alpha_M-s\cos\alpha_M)\,ds, \tag{8}$$

где $r_M=R_M-\rho$. Из (8) следует, что $F(r_M, \alpha_M)=\rho w(\rho, M)$ является прямым преобразованием Радона функции $P_0'(\xi, \eta)$ так как интеграл в (8) вычисляется вдоль прямой, перпендикулярной к $\mathbf{r}_M$ и проходящей через точку с координатами $r_M\cos\alpha_M$, $r_M\sin\alpha_M$. Для вычисления $P_0'(\xi, \eta)$ по значениям $w(\rho, M)$, найденным из (5) по измерениям $P(M, t)$, можно воспользоваться обратным преобразованием Радона [4], которое с учетом (2) приводит к явному выражению для восстановленного распределения плотности энергии:

$$\tilde{I}(x,y)=-\frac{\gamma}{2\pi^2(\gamma-1)\alpha}\int\limits_0^{2\pi}d\alpha_M\int\limits_0^{\infty}\frac{\partial F(r_M,\alpha_M)}{\partial r_M}\times$$

$$\times \frac{dr_M}{r_M-[(x-x_0)\cos\alpha_M+(y-y_0)\sin\alpha_M]}. \qquad (9)$$

При вычислении внутреннего интеграла в (9) подразумевается его главное значение в смысле Коши. Вычисление обратного преобразования Радона является математически некорректной задачей, поэтому для практического применения его при обработке данных измерений необходимо применять те или иные способы регуляризации, основанные на априорной информации о распределении $I(x, y)$.

Если пучок обладает осевой симметрией $I(x, y)=I(r)$, $r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$, то (8) переходит в

$$\rho w(\rho, M)=2\int_0^\infty P_0'[(r_M^2+s^2)^{1/2}]ds. \qquad (10)$$

Соотношение (10) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно P_0'. С учетом (2) и (5) получаем, решив (10),

$$\tilde{I}(r)=-\frac{\gamma}{2\pi\alpha(\gamma-1)}\int_{r>0}^{\infty}\frac{d}{d\sigma}(W(\sigma)+W(-\sigma))\frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-r^2}}, \qquad (11)$$

$$W(\sigma)=(R_M+\sigma)w(R_M+\sigma, M).$$

Если априори координаты x_0, y_0 неизвестны, то их можно вычислить по измерениям $P(M, t)$. При условии $R_M \gg a$, пользуясь (2), (5) и (6) и определением (7), получаем

$$R_M+\Delta_M=\frac{4\gamma u}{\alpha E(\gamma-1)}\int_0^\infty \rho^2 d\rho\int_0^{\rho/u}\frac{P(M,t)dt}{(\rho^2-u^2t^2)^{1/2}}. \qquad (12)$$

Систематическое смещение Δ_M в (12) мало. Можно показать, что оно лежит в пределах $0<\Delta_M\leqslant a^2/R_M$. Измерения $P(M, t)$ в трех или большем числе оптимально выбранных точек M позволяет восстановить координаты «центра тяжести» $\tilde{x}_0$, $\tilde{y}_0$, пользуясь (12) и простыми геометрическими условиями, и одновремено уменьшить систематическое смещение восстановленных расстояний $\tilde{R}_M$, равных $\tilde{R}_M=[(x_M-\tilde{x}_0)^2+(y_M-\tilde{y}_0)^2]^{1/2}$.

Предложенную процедуру восстановления $I(x, y)$ по измерениям давления в звуковых волнах, возбуждаемых импульсным лазерным пучком, естественно назвать акустической томографией импульсных лазерных пучков. Ее применение расширяет возможности использования оптикоакустических методов для исследования параметров лазерных пучков.

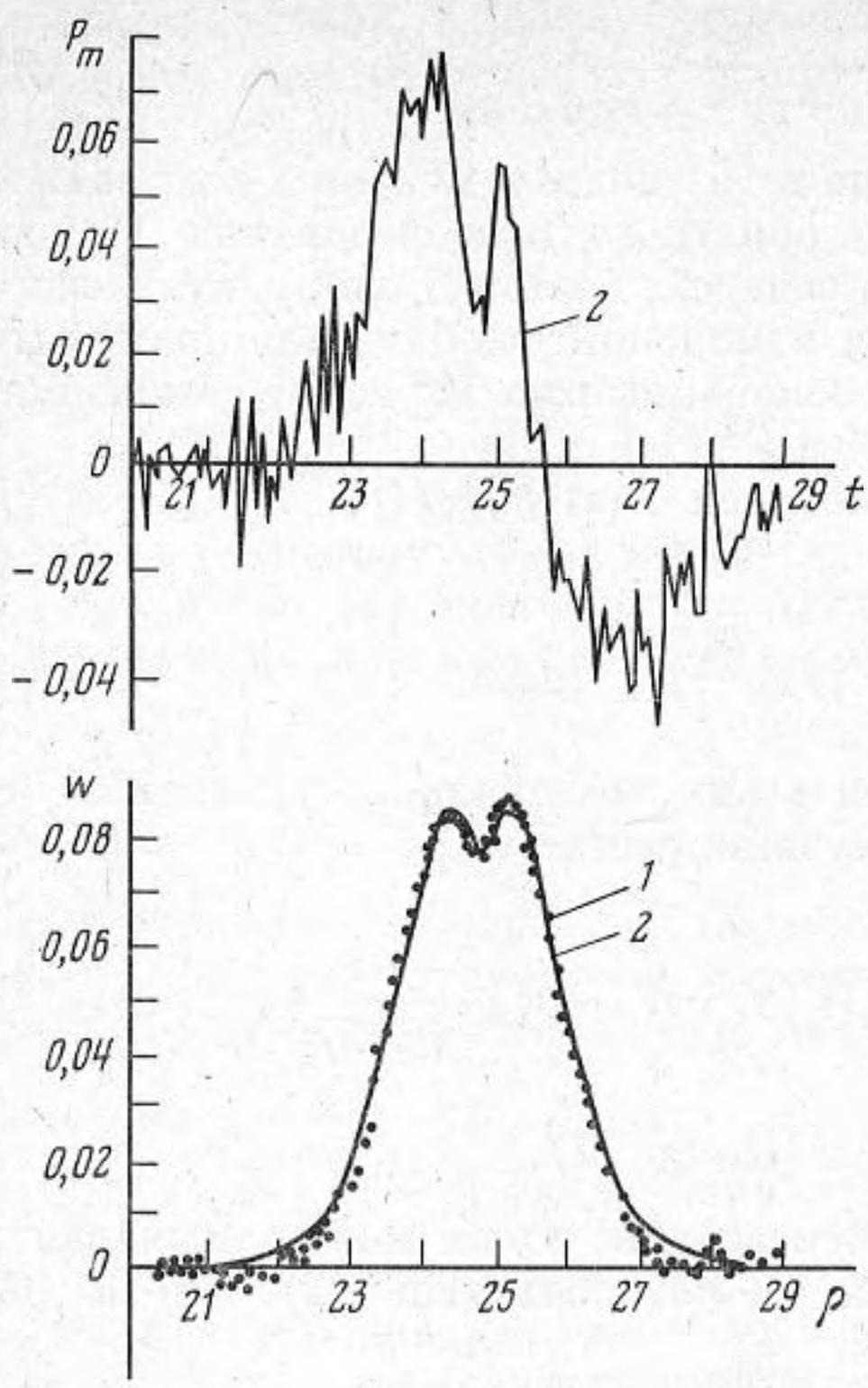
В качестве примера использования акустической томографии был проведен вычислительный эксперимент, заключавшийся в том, что для импульсного лазерного пучка с заданным $I(x, y)$ по формулам (3), (4) вычислялось звуковое давление $P(M, t)$, к нему добавлялся шум измерительного устройства — псевдослучайные числа P_n, и полученный таким образом сигнал — результат измерений использовался для решения на ЭВМ обратной задачи: восстановления распределения плотности энергии $\tilde{I}(x, y)$, которое затем для оценки качества восстановления сравнивалось с исходным I.

В качестве исходного распределения плотности энергии было взято

$$I(x,y)=I_0\left[\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2a_0^2}\right)-\mu^2\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2b_0^2}\right)\right]. \qquad (13)$$

При восстановлении в качестве априорной информации принимались во внимание: осевая симметрия пучка, его характерный размер и считалось, что $x_0^2+y_0^2\leqslant a^2$, однако положение оси пучка, заданное значениями x_0, y_0, считалось априори неизвестным.

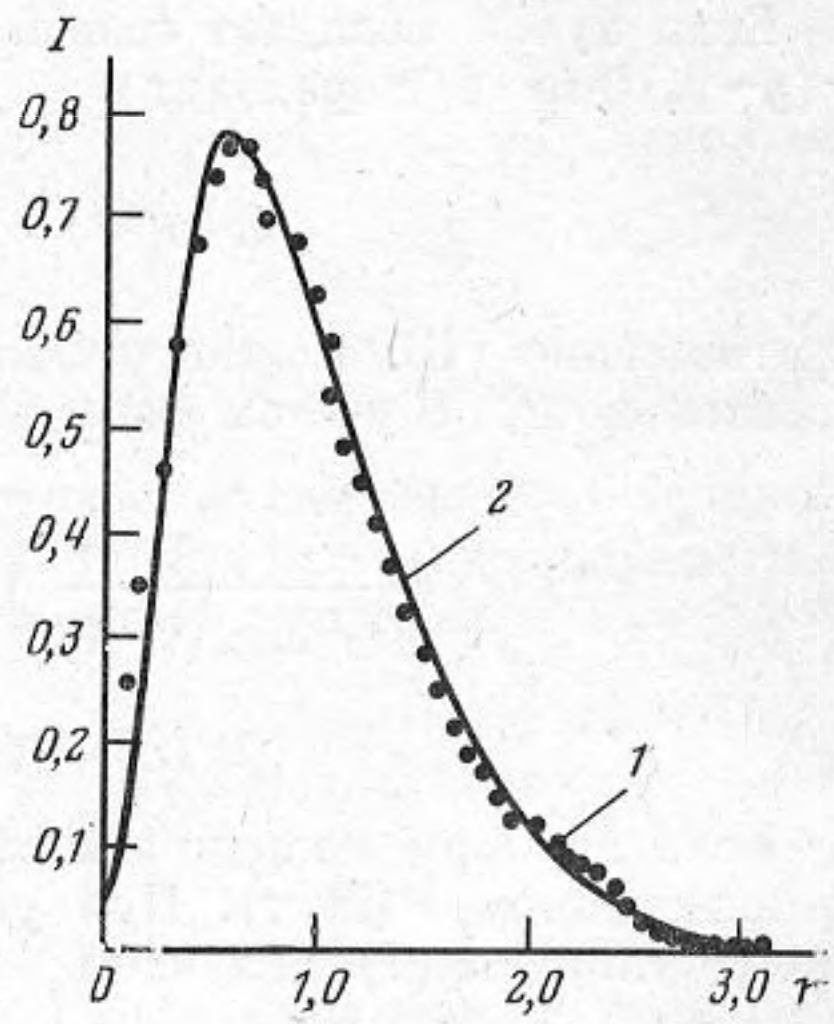
Для (13) w вычисляется по (4) точно и выражается через модифициро-



Фиг. 2

Фиг. 2. Измеренное давление $P_m(t)$, восстановленная по нему функция $w(\rho)$ – *1*, исходная $w(\rho)$ – *2*

Фиг. 3. Восстановленное распределение плотности энергии: *1* – $I(r)$, *2* – исходное $I(r)$



Фиг. 3

ванные функции Бесселя, поэтому дифференцирование по ρ в (3) проводится аналитически и $P(M, t)$ выражается однократным интегралом, который легко вычисляется на ЭВМ. При расчетах на ЭВМ система единиц была выбрана такой, что скорость звука $u=1$; кроме того, параметры среды α, γ в (2) и I_0 в (13) таковы, что $\alpha\gamma^{-1}(\gamma-1)I_0=1$. Смещение оси пучка задавалось $x_0=y_0=2^{-1/2}$, параметры $a_0^2=1$, $b_0^2={}^1/_{17}$, $\mu^2=0{,}95$. Вычисление интеграла (3) для расчета давления $P(M, t)$ проводилось с шагом $5\cdot10^{-3}$ в трех точках плоскости $z=0$, которые с учетом априорной информации были расположены на окружности с центром в начале координат и радиусом $R=25$ с угловым расстоянием $2\pi/3$. Одна из точек находилась на оси x. Расчет $P(M, t)$ проводился для дискретной последовательности значений t, отличавшихся на $\Delta t=0{,}075$. Такой выбор эквивалентен использованию измерительного устройства с полосой пропускания $13u/a$. Иммитирующие шум псевдослучайные нормально распределенные независимые числа P_n имели среднее $\langle P_n\rangle=0$ и среднеквадратичное значение, равное $0{,}1(P(M, t))_{\max}$, и превышали ошибки вычисления давления на полтора-два порядка по крайней мере. На фиг. 2 представлены «измеряемый» сигнал P_m в одной точке от одиночного лазерного импульса и восстановленная по нему с использованием (5) функция $\widetilde{w}(\rho, M)$ с таким же шагом $\Delta\rho=0{,}075$. По $\widetilde{w}$ с помощью (6) вычислялась полная энергия $\widetilde{E}$, среднее значение которой по измерениям в трех точках получилось равным $\widetilde{E}=5{,}63I_0$, что близко к исходному $E=2\pi(a_0^2-\mu^2b_0^2)I_0=5{,}93I_0$. Для нахождения координат центра тяжести пучка с помощью (12) вычислялись $R_M+\Delta_M$ и в качестве x_0, y_0 принимались координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами в точках пересечения окружностей радиуса $R_M+\Delta_M$ с центром в точках M. Найденные таким образом значения $\widetilde{x}_0=0{,}77$, $\widetilde{y}_0=0{,}74$ оказались достаточно близкими к исходным. Их отличие от исходных x_0, y_0 меньше, чем разрешающая способность измерительного устройства, равная 0,075. Используя найденные $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{y}_0$, не составляло труда восстановить значения $\widetilde{R}_M$, отличие которых от исходных R_M не превышало 0,07.

После того как были найдены x_0, y_0 и R_M, можно было воспользоваться априорной информацией об осесимметричности пучка и вычислить $\widetilde{I}(r)$ по формуле (11). Для регуляризации вычислений производных в (11)

найденная по формуле (5) из измерений функция $\widetilde{w}(\rho, M)$, взятая в пяти соседних точках, сглаживалась полиномом второй степени, коэффициенты которого вычислялись методом наименьших квадратов. Кроме того, верхний предел интегрирования в (11) заменялся большим числом A, которое выбиралось из условия, что $\widetilde{w}(\rho, M)$ при $\rho=R_M\pm A$ была неотличима от шумов. Практически во всех случаях значение выбиралось $A\geqslant 3{,}35$. На фиг. 3 приведено осредненное по измерениям в трех точках восстановленное радиальное распределение $\widetilde{I}(r)$ (точки) и для сравнения представлено исходное $I(r)$ (кривая). Можно отметить хорошее согласие между ними, за исключением малых значений r, в области, в которой особенно сильно сказывается влияние шумов измерений.

Проведенный теоретический анализ и результаты вычислительного эксперимента показывают, что измерения давления в звуковых волнах, возбуждаемых лазерным пучком при нагреве им среды, могут использоваться не только для определения поглощенной в среде энергии, но и для восстановления пространственного распределения плотности энергии в лазерном пучке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Божков А. И., Бункин Ф. В., Коломенский А. А., Маляровский А. И., Михалевич В. Г.* Лазерное возбуждение мощного звука в жидкости.– В кн.: Исследования по гидрофизике. Тр. ФИАН, т. 156. М.: Наука, 1984, с. 123–176.
2. *Воробьев В. В.* Оценка интенсивности звука, возникающего при распространении модулированных лазерных пучков в атмосфере и его влияние на тепловую дефокусировку пучков.– Квантовая электроника, 1979, т. 6, № 2, с. 317–337.
3. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической функции. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.
4. *Пикалов В. В., Преображенский Н. Г.* Вычислительная томография и физический эксперимент.– УФН, 1983, т. 141, № 3, с. 469–498.

Институт физики атмосферы
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26.VIII.1985