В частности, при типичных для океана значениях $\delta c/c \sim 10^{-4}$, $r \sim 100$ м, $D \sim 50$ км и общей длине трассы 100 км ($m=4$) область с развитой многолучевостью оказывается весьма малой: $N \sim 10$ при расстоянии Δ от приемника до фокальной точки порядка 100 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Флатте С.* Распространение звука во флуктуирующем океане. М.: Мир, 1982.
2. *Моисеев А. А.* О статистике лучей, приходящих в заданную точку неоднородной среды с флуктуирующими параметрами.– Акуст. журн., 1984, т. 30, № 2, с. 243–248.
3. *Саичев А. И.* Об одном статистическом варианте анализа двухточечной краевой задачи.– Изв. вузов. Радиофизика, 1980, т. 23, № 10, с. 1163–1176.
4. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
5. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.

Институт океанологии
им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
23.XII.1985

УДК 534.83

ОБ АКТИВНОМ ФОРМИРОВАНИИ РАССЕЯННОГО ЗВУКОВОГО ПОЛЯ

Урусовский И. А.

В работах [1–4] обсуждаются рассеянные поля, представленные суперпозицией сходящихся и расходящихся пространственных сферических гармоник с тем или иным набором отношений амплитуд расходящихся к амплитудам сходящихся гармоник (коэффициентов отражения) при различных постановках задачи активного гашения звука. Ввиду значительного разнообразия имеющихся постановок задачи представляет интерес описать объемные скорости источников, корректирующих рассеянное поле до любого из множества допустимых полей с соответственными коэффициентами отражения пространственных гармоник. Соответствующий расчет проведем для активной корректировки амплитуд расходящихся сферических гармоник монополями, распределенными по одной сферической поверхности, следуя схеме, принятой в работе [3]. Допустимыми будут только такие скорректированные рассеянные поля, для которых амплитуды сферических гармоник достаточно быстро стремятся к нулю с увеличением номера гармоники [3, 4] так, чтобы поверхностная плотность объемной скорости монополей оставалась конечной, а амплитуды ее сферических гармоник при этом также стремились к нулю.

В сферических координатах r, θ, φ звуковое давление в падающем поле, все источники которого полагаем расположенными при $r>R$ – снаружи указанной выше сферы $r=R$, радиус которой обозначим через R, при $r\leqslant R$ представляется суперпозицией пространственных сферических гармоник

$$\mathscr{P}(r,\theta,\varphi)=\sum_{q\geqslant 0} A_q j_n(kr)\,\psi_q(\theta,\varphi). \tag{1}$$

Здесь A_q – произвольные коэффициенты, $j_n(kr)$ – сферические бесселевы функции, k – волновое число, $\psi_q(\theta,\varphi)=P_n^m(\cos\theta)\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} m\varphi$, $P_n^m(x)$ – присоединенные полиномы Лежандра, $m=m(q)$, $n=n(q)$; каждому q соответствует единственная пара индексов m и n, m пробегает значения от 0 до n, $n=0,1,2,\ldots$, нумерация пространственных гармоник ведется в порядке возрастания m при каждом фиксированном n и в порядке возрастания n; четным q соответствует косинус, нечетным – синус, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ подразумевается.

Звуковое давление $\bar{p}$, создаваемое поверхностью монополей в однородной среде, можно представить в виде

$$\bar{p}(r,\theta,\varphi)=\sum_{q\geqslant 0} w_q R_n(kr)\,\psi_q(\theta,\varphi), \tag{2}$$

где

$$R_n(kr)=j_n(kR)\,h_n^{(1)}(kr) \quad \text{при } r>R,$$
$$R_n(kr)=j_n(kr)\,h_n^{(1)}(kR) \quad \text{при } r<R,$$

w_q – амплитуды пространственных сферических гармоник корректирующего поля, связанные с распределенной по сфере $r=R$ поверхностной плотностью объемной скорости монополей $V(\theta,\varphi)$ формулами $V(\theta,\varphi)=\sum\limits_{q\geqslant 0} V_q\psi_q(\theta,\varphi)$, $V_q=w_q/(\rho c k^2 R^2)$. Полагая, что в некотором сферическом слое $a\leqslant r\leqslant R$ отсутствуют источники звука и среда в нем однородна, звуковое давление $\tilde{p}$, рассеиваемое областью $r<a$, можно выразить в виде суперпозиции пространственных гармоник с амплитудами a_q:

$$\tilde{p}(r,\theta,\varphi)=\sum_{q\geqslant 0} a_q h_n^{(1)}(kr)\,\psi_q(\theta,\varphi), \qquad r\geqslant a. \tag{3}$$

Из формул (1)–(3) видно, что при $r>R$ полное поле $\mathscr{P}+\bar{p}+\tilde{p}$ будет состоять из сходящихся волн вида $0{,}5A_q h_n^{(2)}(kr)\psi_q(\theta,\varphi)$ и расходящихся волн $0{,}5A_q(1+\varkappa_q)\cdot h_n^{(1)}(kr)\psi_q(\theta,\varphi)$, если

$$j_n(kR)w_q+a_q={}^1/_2\varkappa_q A_q. \tag{4}$$

Здесь $1+\varkappa_q$ имеют смысл коэффициентов отражения сходящихся сферических гармоник, $-\varkappa_q$ – коэффициентов поглощения.

Из формул (3) и (4) нетрудно увидеть насколько быстро должны $\varkappa_q$ стремиться к нулю для того, чтобы амплитуды w_q также стремились при этом к нулю. В случае падающей плоской волны (при этом A_q пропорциональны $2n+1$, $n=n(q)$) так будет, если $|\varkappa_q|$ убывают быстрее, чем $\mathrm{const}\, j_n(kR)/(2n+1)$. При $n+{}^3/_2\gg(kR/2)^2$ последнее выражение приближенно равно $\mathrm{const}\,(kR)^n/[(2n+1)!!(2n+1)]$. Из формулы (4) также следует, что осуществлению произвольных заданных коэффициентов отражения сферических гармоник высоких номеров, если только для них $\varkappa_q$ не стремятся достаточно быстро к нулю с увеличением номера, препятствует естественный предел, связанный с необходимостью задания объемных скоростей монополей, неограниченно возрастающих по величине с ростом номера как $(2n+1)!!n(kR)^{-n}\varkappa_q$.

В принятой схеме [3] приемники звукового давления и колебательной скорости, управляющие корректирующими монополями, расположены на сфере $r=a$, $a<R$. Амплитуды a_q и A_q выражаются через пространственные спектры Π_q и Π_q' соответственно полного звукового давления $p(a,\theta,\varphi)$ и радиальной колебательной скорости $v(a,\theta,\varphi)$ на сфере $r=a$ по формулам [3]: $a_q=(ka)^2[i\Pi_q j_n'(ka)+\Pi_q' j_n(ka)]$, $A_q=-(ka)^2[i\Pi_q h_n^{(1)\prime}(ka)+\Pi_q' h_n^{(1)}(ka)]-w_q h_n^{(1)}(kR)$, где

$$\Pi_q=\gamma_{mn}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}p(a,\theta,\varphi)\psi_q(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta,\quad \Pi_q'=\rho c\gamma_{mn}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}v(a,\theta,\varphi)\psi_q(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta,$$

$$\gamma_{mn}=\frac{(n-m)!\,(2n+1)}{2\pi(n+m)!}\ \text{при}\ m\neq0,\qquad \gamma_{0n}=(2n+1)/4\pi.$$

Подставляя эти выражения в формулу (4), получим искомые амплитуды w_q:

$$w_q=-(ka)^2\{i\Pi_q[j_n'(ka)+{}^1/_2\varkappa_q h_n^{(1)\prime}(ka)]+\Pi_q'[j_n(ka)+{}^1/_2\varkappa_q h_n^{(1)}(ka)]\}/ /[j_n(kR)+{}^1/_2\varkappa_q h_n^{(1)}(kR)]. \tag{5}$$

Отметим, что вопрос о замене непрерывного распределения излучателей на сфере, так же как и приемников, исследован в работах [5, 6]. Применительно к использованной в настоящей работе схеме этот вопрос рассмотрен в статье [3].

В области $0<kR<n+1$ содержащиеся в формуле (5) сферические функции Бесселя и Неймана и их производные по аргументу не имеют корней, фазы функций $h_n^{(1)}(ka)$ и $h_n^{(1)}(kR)$ заключены в пределах $-\pi/2\div0$, а их производных – $0\div\pi/2$. Поэтому при $n>kR-1$, $-1\leqslant\varkappa_q\leqslant0$ фазы коэффициентов при Π_q и Π_q' в формуле (5) не превышают по своей абсолютной величине π. При $n<kR$, $\varkappa_q=-1$ получаем рассмотренный в (3) случай сферы, «черной» по отношению к сферическим гармоникам этих номеров, абсолютная величина фазы коэффициентов при Π_q и Π_q' в этом случае не превышает $\pi+k(R-a)$.

При $4n+2\gg(kR)^2$ формула (5) сводится к приближенной формуле

$$w_q=\Pi_q kR\frac{(2+\varkappa_q)\alpha^{n+1}n\xi_n+i\varkappa_q(n+1)\alpha^{-n}}{\varkappa_q+i(2+\varkappa_q)\xi_n}-\Pi_q'k^2a^2\frac{\varkappa_q\alpha^{-n-1}+i(2+\varkappa_q)\alpha^n\xi_n}{\varkappa_q+i(2+\varkappa_q)\xi_n},$$

где

$$\alpha=\frac{a}{R},\qquad \xi_n=\frac{1}{(2n+1)!!(2n-1)!!}(kR)^{2n+1}.$$

Отсюда видно, что при $|\varkappa_q/(2+\varkappa_q)|\gg\xi_n\alpha^{2n+1}w_q$ мало отличается от соответственного значения w_q для «черной», а при $\xi_n\alpha^{2n+1}\gg|\varkappa_q/(2+\varkappa_q)|$ – для «прозрачной» сферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаров Л. Н., Леманский А. А.* Рассеяние волн «черными» телами. М.: Сов. радио, 1972.
2. *Мазаников А. А., Тютекин В. В., Федорюк М. В.* Активное гашение звуковых полей методом пространственных гармоник.– Акуст. журн., 1980, т. 26, № 5, с. 759–763.
3. *Урусовский И. А.* Об активном гашении звука монополями, распределенными по одной поверхности.– Акуст. журн., 1981, т. 27, № 4, с. 585–594.
4. *Урусовский И. А.* О рассеянии волн «черной» сферой.– Акуст. журн., 1984, т. 30, № 2, с. 267–272.
5. *Коняев С. И., Лебедев В. И., Федорюк М. В.* Дискретная аппроксимация сферической поверхности Гюйгенса.– Акуст. журн., 1977, т. 23, № 4, с. 650–651.
6. *Коняев С. И., Лебедев В. И., Федорюк М. В.* Факторизация звукового поля с помощью концентрических приемных поверхностей.– Акуст. журн., 1979, т. 25, № 5, с. 732–736.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
11.XI.1985