УДК 534.231.1

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗАТУХАНИЯ МОД

Ковалев А. Н., Ривелис Е. А., Эдельштейн С. Л.

Комплексная амплитуда акустического давления на большом расстоянии от источника в стратифицированном волноводе, как известно [1], может быть приближенно представлена суммой распространяющихся нормальных волн (мод): $P\approx \approx \sum_j a_j r^{-1/2}\exp(ik\mu_j r)Y_j(z)$, где $(\mu_j^2,\ Y_j)$ – соответственно собственные числа и собственные функции некоторой спектральной задачи. Если $I_m\mu_j>0$, то, кроме убывания по цилиндрическому закону $r^{-1/2}$, моды экспоненциально затухают, что оказывает существенное влияние и на интерференционную структуру поля. В широко используемых в настоящее время математических моделях волноводов для учета затухания мод вводятся малые мнимые добавки к соответствующим показателям преломления [1–7]. При анализе энергетических характеристик распространения сигналов эти добавки выбираются исходя из необходимости обеспечения адекватного учета спадания интегрального уровня поля. При необходимости анализа интерференционной структуры поля следует учитывать зависимость $I_m\mu_j$ от номера моды j. В связи с этим полезным оказываются формулы, полученные в работе [2].

Полученные ниже результаты являются аналогами этих формул и их обобщений [3, 4]. Они применимы для более сложной модели волновода и позволяют объяснить результаты численного анализа коэффициентов затухания мод [5]. Некоторая коррекция невозмущенной задачи позволяет получить высокую точность асимптотических оценок, достаточную во многих практических случаях.

Рассматривается модель волновода, представляющего собой неоднородный по глубине водный слой, покрытый тонким слоем льда. Затухание мод порождается малыми мнимыми добавками к волновым числам всех типов волн, распространяющихся во льду, воде и упругом грунте (эти добавки определяются параметрами ε_1, ε_2, ε_0, ε_l, ε_τ), а также малой скоростью поперечных колебаний в грунте (C_τ).

Для нахождения μ_j, Y_j возникает следующая спектральная задача:

$$Y''(z)+k^2(N(z)-\mu^2)Y(z)=0, \tag{1}$$

$$Y(h)+k^{-1}f(\mu)Y'(h)=0, \tag{2}$$

$$Y'(H)+kg(\mu)Y(H)=0, \tag{3}$$

где $z=h$ и $z=H$ – верхняя и нижняя границы воды, $h=\rho\varkappa$, ρ – отношение плотности льда к плотности воды, $\varkappa$ – толщина слоя льда (таким образом, слой льда толщины $\varkappa$ – это замороженный слой воды толщины h, $z=0$ – уровень «размороженного» океана), $N(z)=n^2(z)+i\varepsilon_0\chi(z)/kH$, $k=\omega/C_0$, $n(z)=C_0/C(z)$, $C(z)$ – скорость звука в воде, C_0 – ее минимальное значение, ε_0 – малый параметр, характеризующий поглощение в воде. Функция $\chi(z)\geqslant 0$ задает зависимость поглощения в водном слое от глубины; при этом предполагается, что $\int_h^H \chi(z)dz=H-h$.

В том случае, когда дно моделируется однородным упругим полупространством, $g(\mu)=-im(\xi_l^2-\mu^2)^{1/2}/[(1-2\mu^2\xi_\tau^2)^2+4\xi_\tau^3\mu^2(\xi_l^2-\mu^2)^{1/2}(1-\xi_\tau^2\mu^2)^{1/2}]$, где m – отношение плотности воды к плотности упругого дна, $\xi_l=n_l+i\varepsilon_l/2$, $\xi_\tau=(n_\tau+i\varepsilon_\tau/2)^{-1}$, $n_l=C_0/C_l$, $n_\tau=C_0/C_\tau$, C_l, C_τ – скорости продольных и поперечных волн в дне, ε_l, ε_τ – соответствующие коэффициенты поглощения. Отметим, что $\xi_\tau=0$ соответствует модели дна в виде жидкого полупространства (см. [1, 6]).

Несложно получить формулу для адмитанса $f(\mu)$ упругого слоя льда с абсолютно мягкой верхней поверхностью. Методика получения подобных формул хорошо известна ([1]), однако вывод требует громоздких выкладок и здесь не приводится. Имеем

$$f(\mu)=f_у(\mu)=-\rho n_2^{-4}\left(a\frac{\sin k\eta\varkappa}{\eta}\frac{\sin kS\varkappa}{S}+2b\frac{1-\cos k\eta\varkappa\cos kS\varkappa}{\eta^2+S^2}\right)\times$$
$$\times\left(p\cos k\eta\varkappa\frac{\sin kS\varkappa}{S}+d\cos kS\varkappa\frac{\sin k\eta\varkappa}{\eta}\right)^{-1},$$

где $\eta^2=n_1^2-\mu^2$, $S^2=n_2^2-\mu^2$, $p=(2\mu^2-n_2^2)^2$, $a=16\mu^4\eta^2S^2+p^2$, $b=4\mu^2p(\eta^2+S^2)$, $d=4\mu^2\eta^2$, $n_1=C_0/C_1+i\varepsilon_1/2$, $n_2=C_0/C_2+i\varepsilon_2/2$, C_1, C_2 – скорости продольных и поперечных звуковых волн во льду, ε_1, ε_2 – соответствующие коэффициенты поглощения.

Пусть $\delta=kh=\rho k\varkappa\ll 1$. Тогда $f_у(\mu)=-\delta+O(\delta^3)$. Моделирование льда жидкостью с соответствующими характеристиками $\rho_ж$, $n_ж$, $\varkappa_ж$ привело бы к следующему выражению для f:

$$f(\mu)=f_ж(\mu)=-\rho(n_ж^2-\mu^2)^{-1/2}\operatorname{tg}k(n_ж^2-\mu^2)^{1/2}\varkappa=-\delta+O(\delta^3).$$

Обратим внимание на то, что первые члены разложений $f_у$ и $f_ж$ по параметру δ совпадают. Поэтому, если достаточно учитывать лишь этот член, то можно модели-

ровать лед жидкостью. Более того, поскольку в первый член не входит $n_ж$, то его можно брать любым. Естественно выбрать $n_ж=n(h)$, можно также положить $\rho_ж=1$, $\varkappa_ж=h$. Такой выбор параметров означает «размораживание» льда, т. е. замену его эквивалентным слоем воды и рассмотрение задачи (1)–(3) на отрезке $[0;\ H]$ с условием $Y(0)=0$ вместо (2).

Далее учтем различие между $f_у$ и $f_ж$, возникающее в членах порядка δ^3 и δ^5, адмитансным условием при $z=0$. Доопределим $n(z)=n(h)=n_0$, $\chi(z)=\chi(h)$ при $z\in[0;\ h]$.

Потребуем, чтобы уравнение (1) удовлетворялось на всем отрезке $[0;H]$, (3) оставим без изменения, а (2) заменим следующим условием при $z=0$: $Y(0)-k^{-1}(n_0^2-\mu^2)^{-1/2}\operatorname{tg}((n_0^2-\mu^2)^{1/2}\varphi(\mu))Y'(0)=0$. Эквивалентность задач обеспечивается равенством $-(n_0^2-\mu^2)^{-1/2}\operatorname{tg}(n_0^2-\mu^2)^{1/2}(\delta+\varphi(\mu))=f(\mu)$, из которого следует, что $\varphi(\mu)=-[f(\mu)+\delta+(n_0^2-\mu^2)\delta^3/3+2(n_0^2-\mu^2)^2\delta^5/15]/[1+(n_0^2-\mu^2)\delta^2]+O(\delta^7)$.

Отметим, что ε_1, ε_2 могут быть велики, особенно для молодого льда (см. [9], § 5.2). Кроме того, к φ может быть добавлено слагаемое $iq(k\mu)$, задающее затухание среднего поля из-за рассеяния. Таким образом, φ вообще говоря – комплексное число.

Пусть $t_\tau=n_\tau^{-1}=C_\tau/C_0$ – малая величина. Обозначим через $\mu_1(t_\tau)$, $Y_1(z,t_\tau)$ некоторое решение задачи (1)–(3) при $\varepsilon_0=0$, с условием $Y(0)=0$ вместо (2) и функцией

$$G(\mu)=-im(n_l^2-\mu^2)^{1/2}(1-2\mu^2t_\tau^2)^{-2}=g(\mu)+O(t_\tau^3)$$

вместо g в (3). Для нахождения оценок собственных чисел μ используется некоторая модификация метода возмущений [10] для задач Штурма – Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях. Не останавливаясь на математических вопросах, сформулируем результат. При достаточно малых ε для любых $|t_\tau|<\varepsilon^{1/2}$, $|\varepsilon_0|<\varepsilon$, $|\varepsilon_l|<\varepsilon$, $|\delta|<\varepsilon^{1/2}$, $\varepsilon_\tau\in[0,\infty]$ для ближайшего к $\mu_1(t_\tau)$ собственного числа задачи (1)–(3) справедливо представление

$$\mu kH=\mu_1kH+\Bigg[\ i\varepsilon_0H^{-1}\int\limits_0^H\chi Y_1^2\,dz+k^{-2}\varphi(\mu_1)(Y_1^1(0))^2-$$
$$-(g(\mu_1)-G(\mu_1))Y_1^2(H)\Bigg]\Bigg/\Bigg[\ 2\mu_1H^{-1}\int\limits_0^H Y_1^2\,dz+(kH)^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu}G(\mu_1)Y_1^2(H)\Bigg]+O(\varepsilon^2). \tag{4}$$

Обозначив через μ_0, $Y_0(z)$ решение аналогичной задачи, но с функцией $g_0(\mu)=-im(n_l^2-\mu^2)^{1/2}=g(\mu)+O(t_\tau^2)$ вместо g, получим следующую оценку для собственных чисел задачи (1)–(3):

$$\mu kH=\mu_0kH+iA\varepsilon_0+iB\varepsilon_l-Ct_\tau^2+iCt_\tau^3\varepsilon_\tau+iDt_\tau^3+E\varphi(\mu_0)+$$
$$+O((|\varepsilon_0|+|\varepsilon_l|+|t_\tau|^2+|\delta|^3)^2), \tag{5}$$

где

$$A=2V^{-1}\nu_1^{1/2}H^{-1}\int\limits_0^H\chi Y_0^2\,dz,\qquad B=mV^{-1}Y_0^2(H)n_l,$$
$$C=8mV^{-1}Y_0^2(H)\mu_0^2\nu_1,\qquad D=C\nu_1^{1/2},$$
$$E=2k^{-2}V^{-1}(Y_0^1(0))^2\nu_1^{1/2},\qquad \nu_1=\mu_0^2-n_l^2,$$
$$V=4\mu_0\nu_1^{1/2}H^{-1}\int\limits_0^H Y_0^2\,dz+2m\mu_0k^{-1}H^{-1}Y_0^2(H).$$

Отметим, что разложение (4) обеспечивает бóльшую точность, чем разложение (5), обладая в вычислительном плане теми же достоинствами: μ_1, Y_1, как и μ_0, Y_0, вещественны для $\operatorname{Re}\mu\in(n_l;1)$. Однако (5) удобнее для получения качественных и аналитических оценок влияния параметров волновода на коэффициенты затухания мод и поправки к фазовым скоростям. В случае, когда $\chi(z)\equiv1$ и $mk^{-1}H^{-1}\ll\nu_1^{1/2}$, очевидно, $A\approx(2\mu_0)^{-1}$ практически не зависит от функции $n(z)$. Анализ поведения коэффициента A при некоторых других $\chi(z)$ см. в работе [8]. Для случая $n(z)\equiv1$, $\chi(z)\equiv1$ приведем явные выражения для коэффициентов:

$$A=(1-m\nu_2k^{-1}H^{-1}W^{-1})/(2\mu_0),$$
$$B=mn_l\nu_2/(2\mu_0W),\qquad C=4m\mu_0\nu_1\nu_2/W,$$
$$E=\nu_1^{1/2}\nu_2(m^2\nu_1+\nu_2)/(\mu_0W),\qquad \text{где } \nu_2=1-\mu_0^2,$$

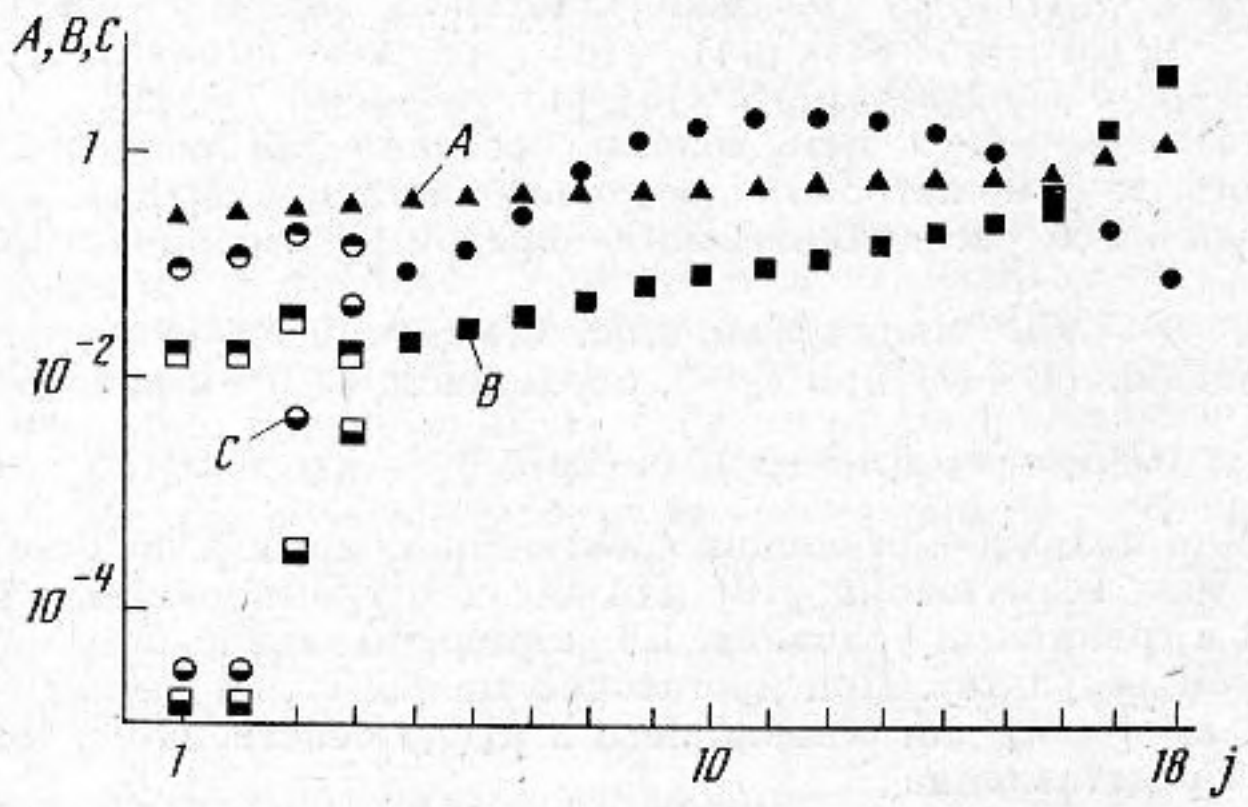
$W=\nu_1^{1/2}(m^2\nu_1+\nu_2)+mk^{-1}H^{-1}(1-n_l^2)$. Отметим, что в этом частном случае коэффициенты C, D, E обращаются в 0 на концах отрезка $[n_l;1]$ и достигают максимума в некоторой его промежуточной точке. Например, при малых $\xi=(1-n_l^2)(1+n_l^2)^{-1}$, $1-m^2$, $(kH)^{-1}$ максимум коэффициента D достигается при

$$\mu_0^2\approx0{,}5(1+n_l^2)(1+0{,}25\xi(\xi+2M)(1+0{,}25\xi M)),$$

где $M=(1-m^2-T)/(1+m^2+2T)$, $T=m(0{,}5(1-n_l^2))^{1/2}k^{-1}H^{-1}$, и примерно равен $m(1-n_l^4)/(1+m^2+2m(0{,}5(1-n_l^2))^{-1/2})$. Легко также видеть, что максимум коэффициента B (равный $kH/2$) достигается при $\mu_0=n_l$. Вблизи этой точки $B\approx kH/2-(kH)^2(\mu_0^2-n_l^2)^{1/2}/2m$; минимум этого коэффициента (равный нулю) достигается при $\mu_0=1$. Вблизи этой точки

$$B\approx(1-\mu_0)n_l/(1-n_l^2)(m(1-n_l^2)^{1/2}+k^{-1}H^{-1}).$$

Для $\mu_0<\min n(z)$ характер поведения коэффициентов разложения (5) аналогичен случаю $n(z)\equiv1$. При больших kH коэффициенты первых мод (для которых $\mu_0>\min n(z)$) могут вести себя качественно иначе. Например, если $n^2(z)\in C^3[0;H]$, то



Зависимость коэффициентов A, B, C от номера j собственного значения для приповерхностного (закрашена верхняя половина символа) и придонного (нижняя половина) каналов. При близости коэффициентов в этих двух случаях закрашен весь символ. $kH=65{,}3$; $m=0{,}6$; $\min C(z)=1470$ м/с; $\max C(z)=1530$ м/с; $C_l=3000$ м/с

воспользовавшись ВКБ-оценками собственных функций (см. [11]), легко показать, что для приповерхностного звукового канала величины B, C, D экспоненциально малы для первых мод, а для придонного канала они не малы и примерно одинаковы. Эти эффекты иллюстрирует фигура, на которой также видны так называемые аномальные эффекты, состоящие в нарушении монотонности коэффициентов затухания с ростом номера моды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука. 1973. 344 с.
2. *Kornhauser E. T., Raney W. P.* Attenuation in Shallow-Water Propagation Die to on Absorbing Bottom // J. Acoust. Soc. Amer., 1955. V. 27. N 4. P. 689–692.
3. *Кацнельсон Б. Г., Кравцов Ю. А., Кузькин В. М., Кулапин Л. П., Петников В. Г.* Упрощенная теория распространения звука в мелком море // Тр. ФИАН. 1984. Т. 156. С. 41–45.
4. *Кузнецов В. К.* К расчету затухания подводного звука в мелком море // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 6. С. 901–905.
5. *Агеева Н. С., Крупин В. Д.* Влияние толщины слоя грунта на частотные характеристики мод в мелком море // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 6. С. 721–727.
6. *Мальцев Н. Е.* Математическое моделирование звуковых полей в океане // Акустика океана. Современное состояние. М.: Наука, 1982. С. 5–24.
7. Акустика дна океана /Под ред. Купермана У. и Енсена Ф. М.: Мир, 1984. 454 с.
8. *Эдельштейн С. Л.* О затухании мод гидроакустического волновода // Математические методы прикладной акустики. Ростов н/Д, Изд-во РГУ, 1986, с. 156–168.
9. *Богородский В. В., Гаврило В. П.* Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 384 с.
10. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 451 с.
11. *Булдырев В. С., Буслаев В. С.* Асимптотические методы в задачах распространения звука в океанических волноводах и их численная реализация // Записки науч. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 117. С. 39–77.

Вычислительный центр
Ростовского государственного
университета им. М. А. Суслова

Поступило в редакцию
21.IV.1986