

УДК 534.16:624.072.4

ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ
ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Львовская Г.Ф.

Получены и проанализированы частотные зависимости волновых чисел, а также отношений касательных и нормальных смещений и фазовых и групповых скоростей соответственных волн в различных частотных диапазонах для тонких упругих однородных стержней постоянной кривизны.

Упругие изогнутые стержни находят применение в акустических линиях задержки, виброизоляционных конструкциях, а также в качестве элементов различных ультразвуковых устройств, например описанных в работах [1–3]. Исследованиям таких стержней посвящено большое число работ. Особенно следует выделить работы [4–12]. Однако из результатов этих работ не представляется возможным создать цельную картину волн в изогнутых стержнях в широком диапазоне частот. Наименее изученной оказалась область низких частот, определяемая согласно работе [5] неравенством $\kappa/\sigma < 0,58$, где σ — кривизна средней линии изогнутого стержня, κ — волновое число изгибных волн на прямом стержне той же толщины. Рассмотрение низкочастотного диапазона в работе [6] сводится к анализу низкочастотной асимптотики $\kappa \ll \sigma$. В работах [9, 10] исследована область низких и средних частот для волн продольного и крутильного типов, изгибные колебания в этих работах не рассматривались. В работе [11] проведено наиболее подробное исследование волн в толстых кольцах в широком диапазоне частот, однако в области низких и средних частот выявлены не все особенности этих волн. В работе [12] выводы работы [11] сравниваются с результатами приближенного анализа колебаний колец. В работе [5] исследована область средних частот, а в остальных работах — высокочастотная область.

Настоящая статья посвящена теоретическому исследованию волн в упругих стержнях постоянной кривизны σ и постоянного поперечного сечения, симметричного относительно плоскости, в которой лежит средняя линия (или ось) стержня, в широком диапазоне частот. Для определенности рассмотрим стержни прямоугольного сечения с толщиной h и шириной b . Принимаются во внимание все типы волн, которые не выводят ось стержня из плоскости, что оправдано геометрией и условиями возбуждения стержня.

Пусть $\xi(s)$ — смещение точки средней линии рассматриваемого стержня, имеющей координату, отсчитываемую по длине дуги s в направлении касательной t к средней линии в этой точке; $\eta(s)$ — смещение в направлении нормали n в этой же точке. Тогда согласно работе [4] уравнения гармонических колебаний изогнутого стержня с частотой ω имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi'' + k^2 \xi - \sigma(1 - a^2 \sigma^2) \eta' + \sigma a^2 \eta''' &= 0, \\ \sigma \xi' + (k^2 - \sigma^2) \eta - a^2 \sigma^2 \eta'' - a^2 \eta^{IV} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число юнговских продольных волн в прямом стержне, a — радиус инерции поперечного сечения стержня относительно оси $[t \times n]$, равный в данном случае $h/2\sqrt{3}$, штрихи означают дифференцирование по длине дуги. Приведенные уравнения справедливы при $h \ll 1/\sigma$ и $b \ll \lambda$, где λ — наименьшая длина волны, распространяющейся по изогнутому стержню. Они выведены при условии малости смещений ξ и η .

Если исключить из этих уравнений ξ , то получим следующее уравнение для η :

$$\eta^{VI} + (k^2 + 2\sigma^2)\eta^{IV} - (\kappa^4 - \sigma^4 - k^2\sigma^2)\eta'' - \kappa^4(k^2 - \sigma^2)\eta = 0, \quad (2)$$

где $\kappa = \sqrt{k/a}$ — волновое число изгибных волн в прямом стержне. Тот же вид имеет уравнение для ξ , что означает наличие линейной зависимости между ξ и η для каждого частного решения уравнения (2). Если искать решения для η в виде $\eta = \eta_0 \exp(iq_j s)$, то решения для ξ запишутся следующим образом: $\xi = \alpha_j \eta_0 \exp(iq_j s)$. Коэффициенты α_j можно найти, например, воспользовавшись уравнением (1). Они имеют следующий вид: $\alpha_j = i(k^2 - \sigma^2 + a^2\sigma^2 q_j^2 - a^2 q_j^4) / \sigma q_j$.

Дисперсионное уравнение для изогнутого стержня соответственно имеет вид $q^6 - (k^2 + 2\sigma^2)q^4 - (\kappa^4 - \sigma^4 - k^2\sigma^2)q^2 + \kappa^4(k^2 - \sigma^2) = 0$, где q — волновое число волны, распространяющейся по рассматриваемому стержню. В зависимости от знака дискриминанта D этого уравнения его решения можно представить в одном из следующих видов [13]: при $D > 0$

$$q_{1,4} = \pm (2p_1^{1/2} \cos \varphi_1 + p_3)^{1/2}, \quad q_{2,5} = \pm (-2p_1^{1/2} \cos \varphi_2 + p_3)^{1/2}, \quad (3)$$

$$q_{3,6} = \pm (-2p_1^{1/2} \cos \varphi_3 + p_3)^{1/2},$$

где

$$p_3 = (k^2 + 2\sigma^2)/3, \quad p_1 = (-p_3^2 - \kappa^4 + \sigma^4 + k^2\sigma^2)/3,$$

$$\varphi_1 = \arccos(-p_1^{-1/2} p_2/2)/3, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \pi/3, \quad \varphi_3 = \varphi_1 - \pi/3,$$

$$p_2 = -2p_3^3 - p_3(\kappa^4 - \sigma^4 - k^2\sigma^2) + \kappa^4(k^2 - \sigma^2), \quad D = -108(p_2^2/4 - p_1^3);$$

при $D < 0$

$$q_{1,4} = \pm (-2p_1^{1/2} \operatorname{cosec} 2\tilde{\alpha} + p_3)^{1/2},$$

$$q_{2,5} = \pm |q_2| (\cos \gamma_1 + i \sin \gamma_1), \quad q_{3,6} = \pm |q_2| (\cos \gamma_1 - i \sin \gamma_1),$$

$$|q_2| = [(p_1^{1/2} \operatorname{cosec} 2\tilde{\alpha} + p_3)^2 + 3p_1 \operatorname{ctg}^2 2\tilde{\alpha}]^{1/2}, \quad (4)$$

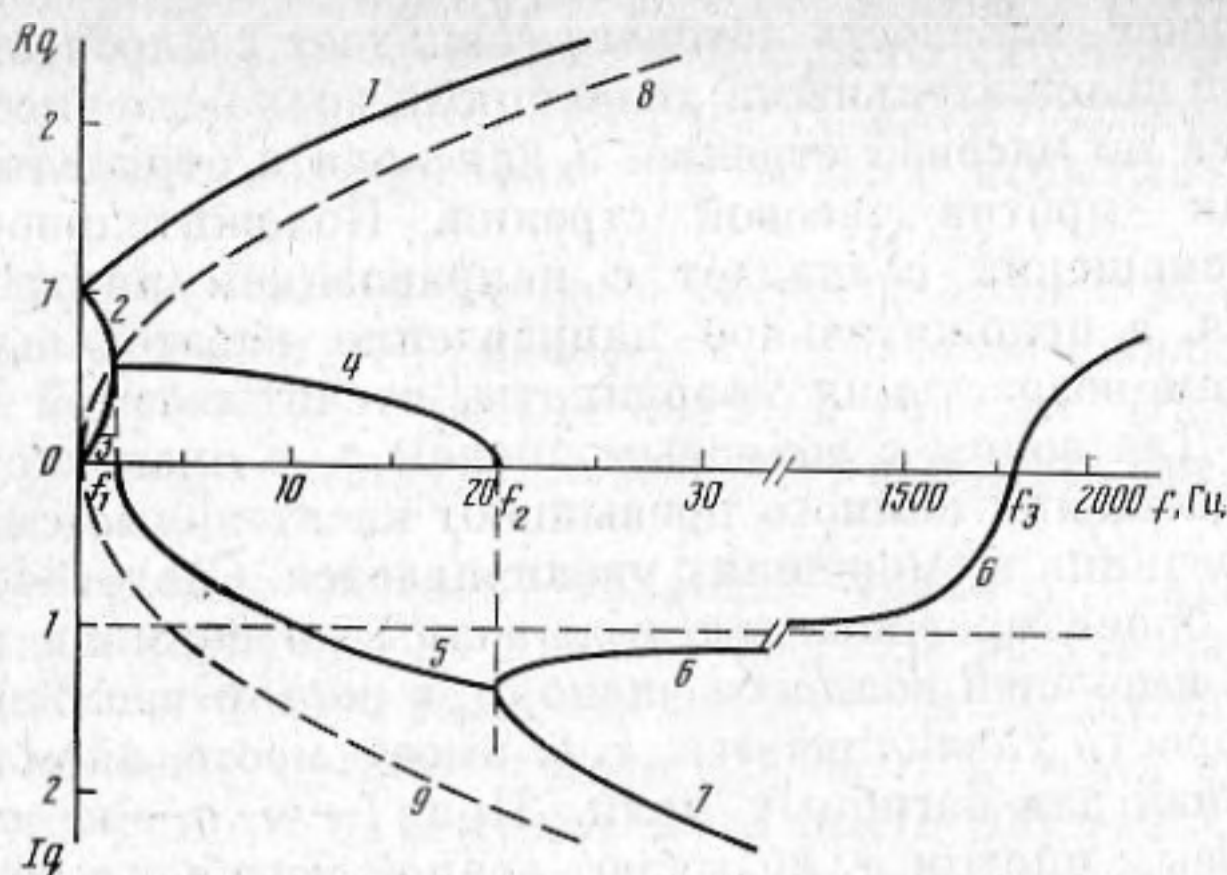
где $\tilde{\alpha} = \arctg \{[\operatorname{tg}(\beta/2)]^{1/2}\}$, $\beta = \arcsin(2p_1^{1/2}/p_2)$, причем $|\tilde{\alpha}| \leq \pi/4$, $|\beta| \leq \pi/2$, $\gamma_1 = \gamma/2 - \pi/2$ при $f > f_0$; $\gamma_1 = \gamma/2$ при $f \leq f_0$, $\gamma = \arctg [(3p_1)^{1/2} \operatorname{ctg} 2\tilde{\alpha} / (p_1^{1/2} \operatorname{cosec} 2\tilde{\alpha} + p_3)]$, f_0 — частота; на которой $p_1^{1/2} \operatorname{cosec} 2\tilde{\alpha} + p_3 = 0$. При $D = 0$, что выполняется, как показано в работе [5], при $\kappa/\sigma \approx 0,58$ ($f = f_1$) и при $\kappa/\sigma \approx 2,05$ ($f = f_2$), справедливы следующие соотношения:

$$\beta = \pi/2, \quad \tilde{\alpha} = \pi/4, \quad \gamma = 0, \quad q_{1,4} = \pm (|q_2| - 3p_1^{1/2})^{1/2}; \quad \text{при } f = f_1$$

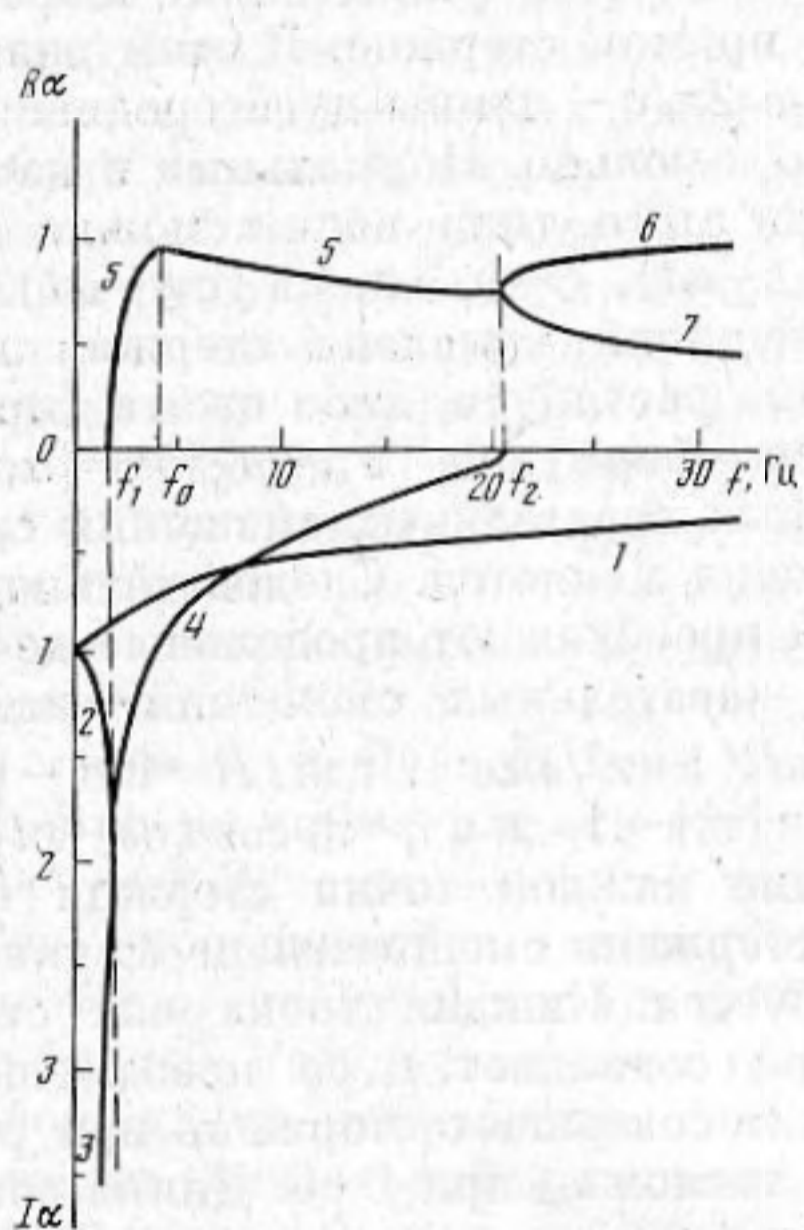
$$q_2 = q_3 = -q_5 = -q_6 = (p_1^{1/2} + p_3)^{1/2}, \quad \text{при } f = f_2 \quad q_3 = -q_2 = q_5 = -q_6 = i(p_1^{1/2} + p_3)^{1/2}. \quad (5)$$

Дисперсионные кривые для q_1, q_2, q_3 , полученные из формул (3) — (5), приведены на фиг. 1. Эти кривые имеют тот же вид, что и дисперсионные кривые, приведенные в работах [11, 12] для не слишком высоких частот. Такое совпадение показывает, что пока стержень можно считать тонким, его рассмотрение использованным в настоящей работе методом дает достаточную точность и нет нужды применять точный, но громоздкий метод, описанный в работе [11]. На фиг. 2 приведены дисперсионные кривые для коэффициентов α_j ($j = 1, 2, 3$), выражающих отношения касательных и нормальных смещений точек средней линии изогнутого стержня для каждого типа волн, возникающих в нем. Нумерация кривых на фиг. 2 соответствует нумерации кривых на фиг. 1. На фиг. 3 приведены частотные зависимости фазовых скоростей c_j и групповых скоростей γ_j ($j = 1, 2, 3$) рассматриваемых волн. Фазовые и групповые скорости найдены по формулам $c_j = \omega / \operatorname{Re} q_j$, $\gamma_j = \partial \omega / \partial (\operatorname{Re} q_j)$. Следует отметить, что согласно работе [14] приведенной формулой для вычисления групповых скоростей можно пользоваться только в том случае, когда $|\operatorname{Im} q_j| \ll |\operatorname{Re} q_j|$. Поэтому γ_1 можно определять во всем частотном диапазоне, а остальные значения групповых скоростей только для частот, меньших или немного превышающих f_1 .

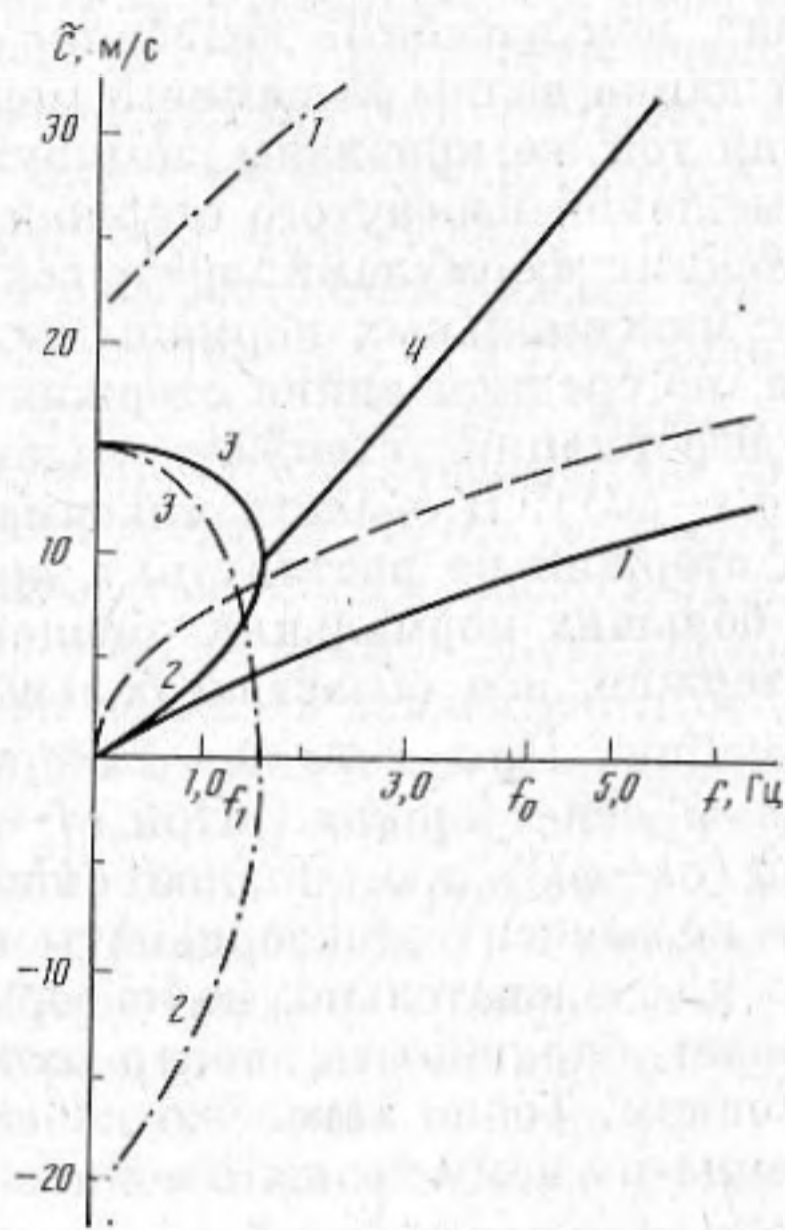
Графики, приведенные на фиг. 1—3, получены для стержня с $h = 5$ мм, $\sigma = 2$ мм⁻¹, $c = 5200$ м/с. Сопоставляя приведенные графики, можно выявить основные особенности волн на изогнутом стержне.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 1. Частотные зависимости волновых чисел q_j волн на изогнутом стержне: $Rq = \text{Re } q_j / \sigma$, $Iq = \text{Im } q_j / \sigma$, $j=1, 2, 3$; $1 - q_1 = \text{Re } q_1$, $2, 3 - q_2 = \text{Re } q_2$, $q_3 = \text{Re } q_3$ при $f < f_1$, $4 - \text{Re } q_2 = \text{Re } q_3$, $5 - \text{Im } q_3 = -\text{Im } q_2$, $6 - q_2 = \text{Im } q_2$ при $f_2 < f < f_3$, $q_2 = \text{Re } q_2$ при $f > f_3$, $7 - q_3 = \text{Im } q_3$. Штриховые линии — частотные зависимости волновых чисел однородных (8) и неоднородных (9) изгибных волн на прямом стержне

Фиг. 2. Частотные зависимости отношений касательных и нормальных смещений оси изогнутого стержня α_j : $R\alpha = \text{Re } \alpha_j$, $I\alpha = -\text{Im } \alpha_j$, $j=1, 2, 3$; $1 - \alpha_1 = \text{Im } \alpha_1$, $2, 3 - \alpha_2 = \text{Im } \alpha_2$, $\alpha_3 = \text{Im } \alpha_3$ при $f < f_1$, $4 - \text{Im } \alpha_3 = \text{Im } \alpha_2$, $5 - \text{Re } \alpha_3 = -\text{Re } \alpha_2$, $6 - \alpha_2 = \text{Re } \alpha_2$, $7 - \alpha_3 = \text{Re } \alpha_3$

Фиг. 3. Частотные зависимости фазовых (сплошные линии) и групповых (штрихпунктирные линии) скоростей волн на изогнутом стержне и фазовой скорости изгибной волны на прямом стержне (штриховая линия): \tilde{c} ; 1-3 соответствуют значениям скоростей c_1, c_2, c_3 или $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. 4 соответствует $c_2 = c_3$ при $f_1 < f < f_2$

При $f < f_1$ (низкие частоты) на изогнутом стержне могут существовать три пары незатухающих волн, распространяющихся в направлении возрастания длины дуги средней линии стержня ($q_j > 0$, $j=1, 2, 3$) и в противоположном направлении ($q_j < 0$, $j=1, 2, 3$). При $f \ll f_1$ $q_{1,2} \approx \sigma(1 \pm \kappa^2 / \sqrt{2}\sigma^2)$, $q_3 \approx k/a\sigma = \kappa^2/\sigma$, $c_{1,2} \approx \omega(1 \mp \kappa^2 / \sqrt{2}\sigma^2)/\sigma$, $c_3 = \gamma_3 \approx c a \sigma \ll c$, $\gamma_1 = -\gamma_2 = \sqrt{2}c_3$. При $f \rightarrow 0$ $q_1, q_2 \rightarrow \sigma$, $q_3 \rightarrow 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow -i$, $\alpha_3 \rightarrow -\infty i$. С ростом частоты q_1 и q_3 возрастают, а q_2 убывает. При $f = f_1$ $q_2 = q_3$. При $f < f_1$ касательные смещения оси стержня отстают по фазе от нормальных смещений на $\pi/2$. Это значит, что в области низких частот каждая точка оси стержня описывает при прохожде-

нии волны эллипс, плоскость которого совпадает с плоскостью оси стержня. Для волн с положительными значениями волновых чисел направление обхода эллипса по часовой стрелке, а для волн с отрицательными волновыми числами — против часовой стрелки. Положительное направление нормальных смещений совпадает с направлением внутренней нормали к оси стержня, а положительное направление касательных смещений — с направлением возрастания координаты, отсчитываемой по длине дуги оси стержня. Для волны с волновым числом q_1 в низкочастотной области нормальные смещения немного превышают касательные смещения. С ростом частоты разница в смещениях увеличивается. Следовательно, длинные оси эллипсов ориентированы для этой волны по нормали к оси стержня. Длина волны, имеющей волновое число q_1 , с ростом частоты уменьшается, а фазовая скорость увеличивается, т. е. имеет место аномальная дисперсия, характерная для изгибных волн. При $f \rightarrow \infty$ $q_1 \rightarrow \kappa$, $\alpha_1 \rightarrow 0$. Поэтому волну с волновым числом q_1 называют волной изгибного типа [4]. Однако в области средних ($f_1 < f < f_2$) и особенно низких частот колебания изогнутого стержня при распространении по нему этой волны имеет более сложный вид, чем изгибные колебания на прямом стержне. В этом диапазоне частот длина волны λ_1 немного меньше $2\pi/\sigma$ — длины дуги средней линии стержня той же кривизны, замкнутого в кольцо. Нормальные и касательные смещения изогнутого стержня для этого типа волны можно задать следующими формулами: $\eta = \eta_0 \cos(q_1 s - \omega t)$, $\xi = |\alpha_1| \eta_0 \sin(q_1 s - \omega t)$. В областях максимальных нормальных смещений кривизна стержня не меняется, но средняя линия стержня либо растянута, либо сжата (продольные деформации стержня задаются формулой $u_{ss} = \partial \xi / \partial s = |\alpha_1| \eta_0 q_1 \times \cos(q_1 s - \omega t)$). В области максимальных касательных смещений средняя линия стержня не растянута, а кривизна меняется. Следовательно, в области больших нормальных смещений преобладают продольные деформации стержня, а в областях больших касательных смещений — изгибные деформации. При $\kappa \ll \sigma$ $\lambda_1 = 2\pi/q_1 \approx 2\pi R(1 - \kappa^2/\sqrt{2}\sigma^2)$, где $R = 1/\sigma$ — радиус кривизны оси стержня. При $f \rightarrow 0$, $|\alpha_1| \rightarrow 1$ и $\eta \approx \eta_0 \cos(\sigma s - \omega t)$, $\xi \approx \eta_0 \sin(\sigma s - \omega t)$, т. е. полное смещение каждой точки стержня в этом случае не зависит от координаты s ; стержень смещается не меняя своей формы и, следовательно, не деформируется. Каждая точка оси стержня описывает окружность, центр которой совпадает с ее невозмущенным положением. Точно такое же колебание совершает стержень при распространении по нему волны с волновым числом q_2 при $f \rightarrow 0$. Длина волны λ_2 задается следующей приближенной формулой: $\lambda_2 \approx 2\pi R(1 + \kappa^2/\sqrt{2}\sigma^2)$. Что касается третьей волны, то ее длина при $\kappa \ll \sigma$ задается формулой $\lambda_3 \approx \approx c\sigma/f = 2\pi R\sigma^2/\kappa^2 = \lambda_n a\sigma \ll \lambda_n$, где $\lambda_n = 2\pi/\kappa$ — длина продольной волны на прямом стержне. Длина такой волны составляет много длин окружностей с той же кривизной, что рассматриваемый стержень. Касательные смещения в такой волне существенно превосходят нормальные смещения. Для анализа типа колебаний стержня, соответствующих этой волне, можно рассмотреть стержень в виде плоской спирали. Если разница в радиусах кривизны внешнего и внутреннего витка меньше среднего радиуса кривизны, то приближенно можно считать, что кривизна такого стержня постоянна. При распространении рассматриваемой волны одна часть витков поворачивается, слабо деформируясь, по часовой стрелке, а другая часть — против часовой стрелки. Каждый следующий виток поворачивается на несколько меньший или больший угол, чем предыдущий. Те витки, соседи которых поворачиваются в противоположных направлениях, оказываются максимально деформированными — либо растянутыми, либо сжатыми. Каждая точка оси рассматриваемой спирали движется по сильно вытянутому эллипсу, длинная ось которого направлена по касательной к средней линии спирали. При повышении частоты эти эллипсы становятся менее вытянутыми. Для волны с волновым числом q_2 рост частоты приводит к тому, что траектории точек оси стержня из окружностей превращаются в эллипсы, вытянутые в тангенциальном направлении. При $f \rightarrow f_1$ формы колебаний, соответствующих второй и третьей волнам, становятся одинаковыми. Длина этих волн приближается к $4\pi R$.

Каждые два соседних кольца спирали поворачиваются в противоположных направлениях, причем одна часть каждого кольца растянута, а другая сжата, промежуточные области каждого кольца испытывают изгибные деформации.

При $f < f_1$ с ростом частоты фазовые скорости волн с волновыми числами q_1 и $q_2 - c_1$ и c_2 — растут, причем $c_1 < c_x$ — фазовой скорости изгибных волн на прямом стержне, c_3 с ростом частоты убывает. При $f = f_1$, $c_2 = c_3$. Таким же образом ведут себя групповые скорости, причем $\gamma_3 > 0$, $\gamma_2 < 0$, при $f \rightarrow f_1 - 0$ γ_2 и $\gamma_3 \rightarrow 0$.

При $f_1 < f < f_2$ (средние частоты) волновые числа q_2 и q_3 комплексны, причем абсолютные величины их мнимых частей с ростом частоты увеличиваются, начиная с нулевого значения при $f = f_1$, а абсолютные величины действительных частей с ростом частоты убывают до нуля при $f = f_2$. При дальнейшем росте частоты q_2 и q_3 остаются чисто мнимыми. Однако при $f = f_3$ (эта частота соответствует $k = \sigma$ и названа в работе [4] критической частотой) q_2 обращается в нуль, становясь при увеличении частоты вещественным (кривая 7, фиг. 1). Следовательно, в области средних частот волны, соответствующие волновым числам q_2 и q_3 — распространяющиеся, но с экспоненциально меняющимися амплитудами. При $f \rightarrow f_2$ эти волны все быстрее изменяют амплитуду, пока при $f = f_3$ не превращаются в неоднородные волны соответственно продольного и изгибного типов. При $f = f_3$ волны продольного типа становятся распространяющимися. Фазовые скорости волн, соответствующих волновым числам q_2 и q_3 в этом диапазоне частот, равны и возрастают, стремясь при $f \rightarrow f_2 - 0$ к $+\infty$. При $f_1 < f < f_0$ групповые скорости γ_2 и γ_3 существенно возрастают, стремясь по частоте $f_0 < f_0$ к ∞ . Колебания, которые совершает каждая точка оси стержня, когда по стержню распространяется волна с волновым числом q_2 или q_3 на средних частотах, можно представить в виде суммы двух колебаний, сдвиг временной фазы которых составляет $\pm \pi/2$ (в зависимости от знака мнимой части $\alpha_{2,3}$). Одно из этих колебаний в свою очередь складывается из смещений по нормали к оси стержня (вклад η) и синфазных (так как $\text{Re } \alpha_j > 0$, $j=2,3$) смещений в тангенциальном направлении. Второе колебание происходит в тангенциальном направлении и отстает по фазе на $\pi/2$ от первого при $\text{Im } \alpha_j < 0$, а при $\text{Im } \alpha_j > 0$ — опережает первое по фазе на $\pi/2$. Результирующая траектория точек оси стержня представляет собой эллипс, направления главных осей которого не совпадают с направлениями касательной и нормали к оси стержня в каждой точке. Для волны с волновым числом q_2 направление обхода этого эллипса по часовой стрелке ($\text{Im } q_2 < 0$), для волны с волновым числом q_3 — против часовой стрелки ($\text{Im } q_3 > 0$). Для этих волн $\eta = \eta_0 \exp(\pm \text{Im } q_j s) \cos(\text{Re } q_j s - \omega t)$, $\xi = |\alpha_j| \eta_0 \exp(\pm \text{Im } q_j s) \sin(\text{Re } q_j s - \omega t + \varphi)$, где $\varphi = \text{arctg}(\text{Im } \alpha_j / \text{Re } \alpha_j)$.

В области высоких частот можно оценить, как влияет небольшое искривление прямого стержня ($\sigma \ll \kappa$) на распространяющиеся по нему волны. Дисперсионное уравнение (5) при малых σ , записанное с точностью до членов, пропорциональных σ^2 , принимает следующий вид: $(q^2 - \kappa^2)(q^2 - k^2)(q^2 + \kappa^2) + \sigma^2(2q^4 + k^2\sigma^2 - \kappa^4) = 0$.

Решения этого уравнения можно представить в виде $q_{1,4} = \pm \kappa [1 - (\sigma^2/\kappa^2)(\kappa^2 + k^2)/4(\kappa^2 - k^2)]$, $q_{2,5} = \pm k [1 - (\sigma^2/k^2)(\kappa^4 - 3k^4)/2(\kappa^4 - k^2)]$, $q_{3,6} = \pm i\kappa [1 + (\sigma^2/\kappa^2)(\kappa^2 - k^2)/4(\kappa^4 + k^2)]$. На низких частотах даже малое искривление стержня существенно влияет на характер распространяющихся по нему волн.

Проведенные исследования показали, что изменение частоты приводит к существенному изменению характера волн, распространяющихся по изогнутому стержню и, следовательно, сильно влияет на формы его колебаний. Особенно сложный вид, существенно отличающийся от обычных продольных и изгибных колебаний прямого стержня, имеют колебания изогнутого стержня в области низких и средних частот. Полученные результаты могут быть использованы при расчетах колебательных систем различного назначения, содержащих изогнутые стержни.

Автор выражает благодарность Ю. Л. Газаряну и С. А. Рыбаку за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сазонов И. А. Концентраторы изгибных волн // Акуст. журн. 1978. Т. 24. С. 925—931.
2. Brigham G. A., Glass B. Present status in the flextensional transducer technology // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 68. № 4. P. 1046—1052.
3. Львовская Г. Ф. Теоретическое исследование ультразвуковых инструментов и излучателей на основе распределенных связанных систем: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук: М.: АКИН, 1983. 18 с.
4. Исакович М. А., Комарова Л. Н. Продольно-изгибные волны в тонком стержне // Акуст. журн. 1967. Т. 13. № 4. С. 579—583.
5. Смирнов В. А., Тартаковский Б. Д. К вопросу о распространении колебаний в изогнутых стержнях // VI Всесоюз. акуст. конф. Докл. Секция М. М.: АКИН, 1968.
6. Бунчук А. В. Свободные волны в цилиндрической пружине с малым шагом // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 2. С. 216—222.
7. Сазонов И. А. Распространение волн в изогнутых стержнях переменного сечения // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 2. С. 292—299.
8. Brigham G. A. In-Plane vibrations of tapered oval rings // J. Acoust. Soc. Amer. 1973. № 54. № 2. P. 451—460.
9. Kagawa Y. On the dynamical properties of helical springs of finite length with small pitch // J. Sound. Vibr. 1968. V. 8. № 1. P. 1—15.
10. Pujara K. K., Kagawa Y. Phase velocities and displacement characteristics of free Waves along a helical spring // J. Acoust. Soc. Japan. 1970. V. 26. № 12. P. 555—561.
11. Haines D. W., Chang N. and Huang C. H. Wave propagation in elastic rings and helical coils of small pitch // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 55. № 6. P. 1138—1143.
12. Haines D. W. Approximate theories for wave propagation and vibrations in elastic rings and helical coils of small pitch // Intern. Journ. Solids structures. 1974. V. 10. № 12. P. 1405—1416.
13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. С. 831.
14. Вайнштейн Л. А. Распространение импульсов. // УФН. 1976. Т. 18. № 2. С. 339—366.

Акустический ин-т
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
23.VI.1986