АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 2

УДК 534.222

К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОВОЙ САМОФОКУСИРОВКИ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ

Романовский М. Ю.

Теоретически исследуется эффект нестационарной тепловой самофокусировки звуковых пучков.

В последнее время появились сведения об экспериментальной реализации одного из видов нелинейного самовоздействия звуковых пучков — эффекта тепловой самофокусировки ТСФЗ (см., например, [1, 2]). Теоретически эффект был исследован в стационарном режиме [3]. Условия реализации ТСФЗ с учетом конкурирующих явлений (на которых здесь останавливаться не будем) были проанализированы в [4]. В этой работе качественные оценки указывали, что стационарный режим ТСФЗ труднореализуем даже в такой сильно поглощающей жидкости, как глицерин (см. также [5]).

Также далеко была продвинута сходная по феноменологии задача о тепловой самофокусировке лазерных пучков [6]. Была построена теория для СФ-импульсов. В последние годы решены задачи оптимизации параметров лазерного излучения с точки зрения распространения его в нелинейной среде и компенсации ТСФ [7], в случайно-неоднородных и движущихся средах [8]. Однако полная задача — динамика ТСФ во времени — аналитически не исследовалась.

Экспериментально наблюдался — при непрерывном излучении [1] как раз нестационарный режим. Было зафиксировано движение образовавшейся перетяжки пучка на излучатель звука. Наблюдалось также поперечное дробление пучка при достаточно длительном излучении мощного звука. Цель работы — описание нестационарного режима ТСФЗ для количественного объяснения существующих экспериментов [1].

При прохождении звука через реальную среду он поглощается (по амплитуде) и среду нагревает. Самый сильный, по оценкам [4], джоулев механизм нагрева. Поскольку для всех жидкостей за исключением воды, жидких металлов — висмута, теллура, скорость звука при повышении температуры среды падает, то в более нагретой области звук идет медленнее, чем в менее нагретой — образуется тепловая собирающая «линза». Эта ситуация описывается исходной для анализа ТСФЗ системой уравнений [4]: неоднородного параболического уравнения для амплитуды пучка

$$2ik\frac{\partial A'}{\partial \xi}=\nabla_\perp^2 A'+k^2|\gamma_p|TA'^*, \qquad (1)$$

и уравнения теплопроводности с квадратичным по амплитуде волны источником

$$\partial T/\partial t=\chi\nabla_\perp^2 T+\delta A'A'^*/\rho_0^2 c_0 C_p. \qquad (2)$$

Здесь $k=\omega/c_0$ — волновой вектор, ω — круговая частота, c_0 — невозмущенная скорость волны в среде, $\gamma_p=\partial \ln c_0^2/\partial T$, A' — амплитуда волнового пучка, $\xi=x-c_0t$ — «бегущая» волновая координата, $\nabla_\perp^2$ — поперечный лапласиан. Для цилиндрически-симметричных пучков (в дальнейшем будем рассматривать именно такие) $\nabla_\perp^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)r$ — поперечная координата, T — неравновесная температура среды, χ — коэффициент температуропроводности, δ — коэффициент поглощения звука по амплитуде, ρ_0 — плотность, C_p — удельная теплоемкость среды.

Для анализа сходной задачи о самофокусировке световых пучков используется аппарат геометрической оптики (см. [6]). Аппаратом геометрической акустики для анализа рассматриваемой задачи можно пользоваться, начиная с диапазона ультразвуковых частот, так как характерная длина задачи (в нашем случае фокусное расстояние нелинейной тепловой линзы $L_ф$) не должна превышать длину дифракционной расходимости $R_d=kr_0^2/2$ (r_0 — начальный радиус пучка). В условиях эксперимента [1] частота звука порядка 2 Мгц и $R_d\simeq 30$ см, что превышало длину кюветы с жидкостью. Известно также [4], что эффект нестационарной ТСФЗ растет пропорционально четвертой степени частоты звука для классических жидкостей, а R_d растет линейно. Поэтому в ультразвуковом диапазоне частот $\omega/2\pi \gtrsim 1$ Мгц обращение к аппарату геометрической акустики, как это сделано в ряде работ (см. [3]), представляется обоснованным.

Полагая $A'=A\exp(-iks)$, где A и s — функции ξ, r, t, получим уравнения геометрической акустики, точно совпадающие с аналогичными уравнениями нелинейной оптики.

В последнем случае для анализа такой системы (см. [6]) пользуются автомодельной подстановкой, определяемой параболическим законом зависимости входной (на границе нелинейной среды) амплитуды волны от поперечной координаты r. Тем более справедливо это в акустическом случае, где входное распределение амплитуды от реального пьезокерамического излучателя звука подобно опрокинутой параболе, а при известном усилии может быть реализовано параболическим. Поэтому решения для A и s ищем в виде [6]. Для T полагаем закон зависимости от r также квадратичным. Для времени $t<r_0^2/\chi\sim 1$ мин такое разложение T является хорошим приближением точного решения (2): $T=F_1+r^2F_2$.

Подставляя s, A и T в систему уравнений геометрической акустики, получим пять уравнений, удобных для анализа:

$$\beta=f^{-1}\partial f/\partial\xi, \tag{3}$$

$$\partial\beta/\partial\xi+\beta^2=|\gamma_p|F_2, \tag{4}$$

$$2\partial\varphi/\partial\xi=|\gamma_p|F_1, \tag{5}$$

$$\partial F_1/\partial t=4\chi F_2+\delta A_0^2/\rho_0^2 c_0 C_p f^2, \tag{6}$$

$$\partial F_2/\partial t=-2\delta A_0^2/\rho_0^2 c_0 C_p r_0^2 f^4. \tag{7}$$

Здесь f — безразмерный радиус пучка, β — амплитуда неоднородного по сечению пучка набега фазы волны, φ — однородный набег фазы, A_0 — входное значение амплитуды пучка. Уравнение (5) определяет набег фазы волны ввиду однородного нагрева среды; (4) — неоднородного. Уравнение (3) означает, в частности, что при постоянном f фазовый фронт плоский, (6) описывает изменение однородной температуры из-за джоулева нагрева среды и ее температуропроводности.

Подставляя (3) в (4) и дифференцируя полученное выражение по времени, получим уравнение для безразмерного радиуса пучка:

$$\frac{\partial}{\partial t}f^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}=-\frac{\alpha P}{f^4};\qquad \alpha=\frac{4\delta|\gamma_p|}{\pi\rho_0 C_p r_0^4}. \tag{8}$$

Здесь $P=\pi r_0^2 A_0^2/2\rho_0 c_0$ — полная мощность звукового пучка. Она может зависеть от времени $P=P(t)$ без нарушения общности задачи. Граничные условия $f(z=0)=1$; $\partial f/\partial z(z=0)=\pm 1/R$ должны выполняться для любого момента времени. Здесь R — радиус кривизны фронта входного пучка, знак + соответствует расходящемуся — сходящемуся пучку.

Так как в уравнение (8) явно не входят переменные ξ и t, его можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\ln f}{\partial\xi}\right)^3=\alpha P[\exp(-4\ln f)-\exp(-2\ln f)]. \tag{9}$$

Замена переменной

$$\xi=(\alpha E\xi^2)^{1/3}, \qquad \mathrm{E}=\int_0^t P(t')\,dt' \tag{10}$$

сводит уравнение (9) к уравнению в полных дифференциалах:

$$f^{-1}\partial f/\partial\xi=(81(1/f^2-1)^2/16+a^{-3})^{1/3}. \tag{11}$$

Здесь $a^{-1}=\partial \ln f/\partial\xi|_{\tau=0}$; $f|_{\tau=0}=1$ — начальное условие для этого уравнения. Величина a связана с R в режиме адиабатического включения излучения; для пучка с плоским входным фронтом $R=\infty$; $a=\infty$ и решение (11) может быть записано в неявном виде для $y=(f^{-2}-1)^{1/3}$:

$$y\sqrt[3]{3/2}=\pi/6\sqrt{3}+\ln[(y+1)^2(y^2-y+1)^{-1}]+\operatorname{arctg}[(2y-1)\sqrt{3}]/\sqrt{3}. \tag{12}$$

При непрерывном излучении звука можно положить $\xi=z$ продольной координате и длина самофокусировки определится из условий

$$y\to\infty;\ \ln[(y+1)^2(y^2-y+1)^{-1}]\to 0, \tag{13}$$

$$L_\Phi=(64\pi^3/243\sqrt{3}\alpha\mathrm{E})^{1/2}.$$

Для определения порогового значения энергии, введенной в среду, необходимо потребовать, чтобы нелинейное сжатие пучка превосходило его дифракционное расплывание: $L_\Phi\leqslant R_d$. Поэтому $\mathrm{E}\geqslant\mathrm{E}_{кр}=0{,}096\lambda^2\rho_0 C_p/\delta|\gamma_p|$; $\lambda=2\pi/k$. Такое значение $\mathrm{E}_{кр}$ примерно в 1,5 раза меньше оценки, приведенной в [4]; $\mathrm{E}_{кр}\sim 2{,}6$ Дж для самофокусировки в бензоле на частоте звука $\omega/2\pi\sim 2$ Мгц; величина (14) порядка экспериментально наблюдаемой [1].

Если P константа, то $L_\Phi\simeq Dt^{-1/2}$, что наблюдалось экспериментально [1]. Расчетная константа пропорциональности $D\sim 12$, наблюдаемая 8,8; все при полной мощности излучения 15 Вт.

В дифракционном смысле самосогласованной задачей будет уравнение (11), в котором a связано с $R=R_d$. Такая постановка позволит улучшить оценку (14). Аналитического решения (11) при этом получить нельзя. Для определения пороговой энергии следует потребовать, чтобы экстремум в (11): $\partial f/\partial\xi=0$; $\partial^2 f/\partial\xi^2=0$ переходил в максимум — т. е. чтобы пучок начал сжиматься. Пороговая энергия определится при этом из условия $a=\sqrt[3]{81/16}$. Выяснение начальных условий автомодельных решений является дополнительной физической задачей. Для адиабатического режима включения при $R=R_d$ $\mathrm{E}_{кр}\sim 3{,}2$ Дж для условий эксперимента [1].

Реальное поперечное распределение входной амплитуды отличается от параболического. Выясним, как по мере распространения звука в нелинейной среде будут эволюционировать непараболические добавки к величинам s, A и T. Представим их в виде

$$A^2=A_0^2|1-2r^2/r_0^2f^2+\beta_2 r^N|f^{-2}, \tag{14}$$

$$s=\varphi+\beta r^2/2+\beta_1 r^N, \tag{15}$$

$$T=F_1+r^2F_2+r^NF_N.$$

Здесь N — целое. Оказывается, для того чтобы точно удовлетворить системе уравнений геометрической теории волн [6], величины β_1 и F_N должны тождественно равняться нулю для любого $N\geqslant 3$. Величина же β_2 оказывается обратно пропорциональной f^N: $\beta_2=\beta_2^{(0)}/r_0^Nf^N$. При сжатии пучка величина f^{-N} растет быстрее, чем f^{-2}. Непараболическая добавка поэтому при определенном расстоянии может стать больше параболической составляющей звукового давления и, следовательно, пучок может поперечно дробиться. Это дробление должно стать заметным после расширения пучка из фокуса. Подобный результат можно интерпретировать как поперечную неустойчивость пучка к непараболичности поперечного распределения входной амплитуды по мере распространения звука в нелинейной среде.

Другой причиной поперечного дробления пучка является нарастание абсолютного значения величины s со временем. При больших t, но при $t<r_0^2/\chi$, величина $\beta\sim 1/z$; величина же $\varphi\sim\sqrt{E/E_{кр}}$; эффект дробления предпочтительнее наблюдать при значительной мощности излучаемого звука. Этими двумя механизмами, по-видимому, можно объяснить наблюдаемую в [1] структуру «темного» светового поля.

Таким образом, развитая методика описания имеющихся экспериментов по ТСФЗ уточняет имевшиеся ранее качественные теоретические оценки эффекта — полученные значения $E_{кр}$ и $L_ф$ согласуются с наблюдаемыми, а также позволяет качественно описать наблюдаемый процесс поперечного дробления пучка. Ввиду сходства с задачей с ТСФ лазерных пучков развиваемая методика применима и для нее. В частности, видимо, соотношение (13) объясняет явление движущихся фокусов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ассман В. А., Бункин Ф. В., Верник А. В., Ляхов Г. А., Шипилов К. Ф.* Наблюдение теплового самовоздействия звукового пучка в жидкости. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. № 4. С. 148–150.
2. *Андреев В. Г., Карабутов А. А., Руденко О. В., Сапожников О. А.* Наблюдение самофокусировки звука // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 381–384.
3. *Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.* Тепловое самовоздействие звуковых волн // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 1. С. 28–31.
4. *Бункин Ф. В., Воляк К. И., Ляхов Г. А.* Эффекты самовоздействия и вынужденного рассеяния звуковых пучков — тепловая самофокусировка // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 575–584.
5. *Бункин Ф. В., Воляк К. И., Ляхов Г. А., Романовский М. Ю.* Нестационарная тепловая самофокусировка и вынужденное рассеяние звука в поглощающих жидкостях // X Всесоюз. акуст. конф. Докл. Секция Б. М.: 1983, с. 9–11.
6. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде // УФН. 1967. Т. 93. С. 19–70.
7. *Ахманов С. А., Воронцов М. А., Кандидов В. П., Сухоруков А. П., Чесноков С. С.* Тепловое самовоздействие световых пучков и методы его компенсации // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. С. 1–37.
8. *Егоров К. Д., Кандидов В. П.* Нестационарное тепловое самовоздействие световых импульсов в движущейся среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. С. 801–808.

Институт общей физики
АН СССР

Поступила в редакцию
30.V.1986