АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 2

УДК 534

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ПРОТЯЖЕННОМ ЖИДКОМ ТЕЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Тэтюхин М. Ю.

Задача дифракции плоской звуковой волны на протяженном жидком теле сведена к системе одномерных интегральных уравнений Фредгольма. Проведены численные расчеты.

Пусть в пространстве, заполненном однородной и изотропной жидкой или газообразной средой с плотностью ρ_1 и скоростью звука c_1, имеется неоднородность — область D_2, заполненная средой с параметрами ρ_2, c_2. Граница S области D_2 — гладкая замкнутая поверхность, заданная уравнением $r=dF(z/l, \varphi)$, $-l\leqslant z\leqslant l$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ в цилиндрических координатах. Здесь $0<F(t, \varphi)\leqslant 1$ при $|t|\leqslant 1$. D_1 — внешность S. Рассмотрим задачу рассеяния плоской волны $u_0=\exp(i(\mathbf{k}_1, \mathbf{r}))$ на неоднородности D_2. Здесь $k_j=\omega/c_j$, $\mathbf{k}_j^2=k_j^2$, $j=1, 2$. Рассеянные поля $u_1(\mathbf{r})$ внутри D_1 и $u_2(\mathbf{r})$ внутри D_2 удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$(\Delta+k_1^2)u_1(\mathbf{r})=0; \quad (\Delta+k_2^2)u_2(\mathbf{r})=0 \tag{1}$$

и краевым условиям

$$(u_1+u_0)|_S=u_2|_S; \quad \rho_1\frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_S=\rho_2\frac{\partial(u_1+u_0)}{\partial n}\Big|_S \tag{2}$$

на поверхности S, где $\partial/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к S. Рассеянное поле $u_1(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда. Предполагается, что $k_jl\gg 1$, $k_jd\cong 1$, $\varepsilon=d/l\ll 1$. В случае, когда S — поверхность вращения и $k_jd\ll 1$, задача была исследована в работе [1].

Будем искать $u_j(\mathbf{r})$ в виде волновых потенциалов простого слоя

$$u_j(\mathbf{r})=\Pi_{1j}(\mu_j)\equiv\iint\limits_S\frac{\exp(ik_j|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mu_j(\mathbf{r}')\,dS. \tag{3}$$

Функции $\Pi_{1j}(\mu_j)$ удовлетворяют уравнениям (1), а $\Pi_{11}(\mu_1)$ — условию излучения. Плотности μ_j удовлетворяют системе интегральных уравнений Фредгольма (см. [2])

$$\rho_2\Big[-2\pi\mu_1(\mathbf{r})+\iint\limits_S\frac{\partial}{\partial n}\frac{\exp(ik_1|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mu_1(\mathbf{r}')\,dS+\frac{\partial u_0(\mathbf{r})}{\partial n}\Big]=$$

$$=\rho_1\Big[2\pi\mu_2(\mathbf{r})+\iint\limits_S\frac{\partial}{\partial n}\frac{\exp(ik_2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mu_2(\mathbf{r}')\,dS\Big], \tag{4}$$

$$\iint\limits_S\frac{\exp(ik_2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mu_2(\mathbf{r}')\,dS=$$

$$=\iint\limits_S\frac{\exp(ik_1|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mu_1(\mathbf{r}')\,dS+u_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}\in S.$$

Пусть k_1, θ_0, φ_0 — сферические координаты волнового вектора $\mathbf{k}_1$. Будем искать неизвестные плотности μ_j в виде произведения осциллирующей экспоненты на медленно меняющиеся функции z:

$$\mu_j=\exp(ik_1z\cos\theta)\nu_j(z/l, \varphi). \tag{5}$$

Введем обозначения: $r=dr_0$, $r_0=F(z', \varphi)$, $z'=z/l$; тогда получим

$$\Pi_{1j}(\mu_j)=d\exp(ik_1z\cos\theta_0)\int\limits_0^{2\pi} I_j(\nu_j)\,d\tilde{\varphi},$$

$$I_j(\nu_j)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\exp(ik_jlS)}{R_1}\sqrt{F^2+F_\varphi'^2+\varepsilon^2F^2F_z'^2}\,\nu_j(t,\tilde{\varphi})\,dt, \tag{6}$$

$F=F(t, \tilde{\varphi})$, $R_1^2=(t-z')^2+\varepsilon^2[r_0^2+F^2-2r_0F\cos(\varphi-\tilde{\varphi})]$, $S=R_1+(t-z')\cos\theta_0$. Как показано в [3], при дополнительном условии $|\cos\theta_0|<k_2/k_1$ имеем

$$\begin{gathered}I_1(\nu_1)\cong\pi iH_0^{(1)}(k_1d\rho\sin\theta_0)\sqrt{\tilde{r}_0^2+\tilde{r}_{0\varphi}'^2}\;\nu_1(z',\tilde{\varphi}),\\ I_2(\nu_2)\cong\pi iH_0^{(1)}(k_2d\rho\sqrt{1-\cos^2\theta_0k_1^2/k_2^2})\cdot\sqrt{\tilde{r}_0^2+\tilde{r}_{0\varphi}'^2}\;\nu_2(z',\tilde{\varphi}),\end{gathered} \tag{7}$$

где $\tilde{r}_0=F(z', \tilde{\varphi})$, $\rho^2=r_0^2+\tilde{r}_0^2-2r_0\tilde{r}_0\cos(\varphi-\tilde{\varphi})$.
Отсюда следуют формулы

$$\Pi_{11}(\mu_1)=\exp(ik_1z\cos\theta_0)\,\Phi_1(\nu_1),\qquad \Phi_1(\nu_1)=d\int\limits_0^{2\pi} I_1(\nu_1)\,d\tilde{\varphi},$$

$$\Pi_{12}(\mu_2)=\exp(ik_1z\cos\theta_0)\,\Phi_2(\nu_2),\qquad \Phi_2(\nu_2)=d\int\limits_0^{2\pi} I_2(\nu_2)\,d\tilde{\varphi},$$

$$\frac{\partial\Pi_{11}(\mu_1)}{\partial n}=\exp(ik_1z\cos\theta_0)\,\Phi_3(\nu_1),\qquad \Phi_3(\nu_1)=-\pi ik_1d\sin\theta_0(r_0^2+r_{0\varphi}'^2)^{-1/2}\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi} H_1^{(1)}(k_1d\rho\sin\theta_0)\rho^{-1}(\tilde{r}_0^2+\tilde{r}_{0\varphi}'^2)^{1/2}\nu_1(z',\tilde{\varphi})\,[r_0^2-r_0\tilde{r}_0\cos(\varphi-\tilde{\varphi})-$$

$$-\tilde{r}_0r_{0\varphi}'\sin(\varphi-\tilde{\varphi})]\,d\tilde{\varphi},$$

$$\frac{\partial\Pi_{12}(\mu_2)}{\partial n}=\exp(ik_1z\cos\theta_0)\,\Phi_4(\nu_2),\qquad \Phi_4(\nu_2)=-\pi ik_2d\sqrt{1-\cos^2\theta_0k_1^2/k_2^2}\times$$

$$\times(r_0^2+r_{0\varphi}'^2)^{-1/2}\int\limits_0^{2\pi} H_1^{(1)}(k_2\,d\rho\sqrt{1-\cos^2\theta_0k_1^2/k_2^2})\rho^{-1}(\tilde{r}_0^2+\tilde{r}_{0\varphi}'^2)^{1/2}\times$$

$$\times\nu_2(z',\tilde{\varphi})\,[r_0^2-r_0\tilde{r}_0\cos(\varphi-\tilde{\varphi})-\tilde{r}_0r_{0\varphi}'\sin(\varphi-\tilde{\varphi})]\,d\tilde{\varphi}.$$

В этих и последующих формулах отброшены члены порядка $O(\varepsilon)$ и $O((kl)^{-2})$. Подставляя полученные выражения в (4), окончательно имеем

$$\begin{gathered}\Phi_2(\nu_2)=\Phi_1(\nu_1)+\exp(ik_1dr_0\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi)),\\ \rho_1[2\pi\nu_2(z',\varphi)+\Phi_4(\nu_2)]=\rho_2[-2\pi\nu_1(z',\varphi)+\\ +\Phi_3(\nu_1)+ik_1\sin\theta_0(r_0^2+r_{0\varphi}'^2)^{-1/2}(r_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\\ +r_{0\varphi}'\sin(\varphi-\varphi_0))\exp(ik_1dr_0\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0))].\end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, для функций ν_j мы получили семейство систем одномерных интегральных уравнений Фредгольма, зависящих от параметра $z'\in[-1, 1]$, которые не содержат больших величин k_1l, k_2l, что существенно облегчает практические вычисления.

Из формул (3), (5) находим главный член асимптотики амплитуды рассеяния:

$$f(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0) = ld \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \exp[ik_1 lt(\cos\theta_0 - \cos\theta) -$$

$$- ik_1 d\tilde{r}_0 \sin\theta \cos(\varphi - \tilde{\varphi})] \nu_1(t, \tilde{\varphi}) (\tilde{r}_0^2 + \tilde{r}_{0\varphi}'^2)^{1/2} d\tilde{\varphi}\, dt. \qquad (9)$$

В случае, когда S — поверхность вращения, выражение для главного члена асимптотики амплитуды рассеяния принимает вид

$$f(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0) = \frac{il}{\pi} \int_{-1}^{1} \exp(ik_1 lt(\cos\theta_0 - \cos\theta)) \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im(\varphi - \varphi_0)) J_m(k_1 dr_0 \sin\theta) \nu_{1m}\, dt, \qquad (10)$$

где

$$\nu_{1m} = \frac{\rho_1 b_2 J_m(b_1) (H_m^{(1)}(b_2))' - \rho_2 b_1 J_m'(b_1) H_m^{(1)}(b_2)}{J_m(b_1) [\rho_1 b_2 H_m^{(1)}(b_1) (H_m^{(1)}(b_2))' + \rho_2 b_1 (H_m^{(1)}(b_1))' H_m^{(1)}(b_2)]}, \qquad (11)$$

$$b_1 = k_1 dr_0 \sin\theta_0 \quad b_2 = k_2 dr_0 \sqrt{1 - \cos^2\theta_0 k_1^2/k_2^2}.$$

Формулы (8), (9) справедливы и в случае $|\cos\theta_0| > k_2/k_1$, если положить

$$\Phi_1(\nu_1) = \pi i d \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}(k_1 d\rho \sin\theta_0) \sqrt{\tilde{r}_0^2 + \tilde{r}_{0\varphi}'^2}\, \nu_1(z', \tilde{\varphi})\, d\tilde{\varphi},$$

$$\Phi_2(\nu_2) = 2d \int_0^{2\pi} K_0(k_2 d\rho \sqrt{\cos^2\theta_0 k_1^2/k_2^2 - 1}) \sqrt{\tilde{r}_0^2 + \tilde{r}_{0\varphi}'^2}\, \nu_2(z', \tilde{\varphi})\, d\tilde{\varphi},$$

$$\Phi_3(\nu_1) = -\pi i k_1 d \sin\theta_0 (r_0^2 + r_{0\varphi}'^2)^{-1/2} \int_0^{2\pi} H_1^{(1)}(k_1 d\rho \sin\theta_0) \rho^{-1} \times$$

$$\times (\tilde{r}_0^2 + \tilde{r}_{0\varphi}'^2)^{1/2} \nu_1(z', \tilde{\varphi}) [r_0^2 - r_0 \tilde{r}_0 \cos(\varphi - \tilde{\varphi}) - \tilde{r}_0 r_{0\varphi}' \sin(\varphi - \tilde{\varphi})]\, d\tilde{\varphi},$$

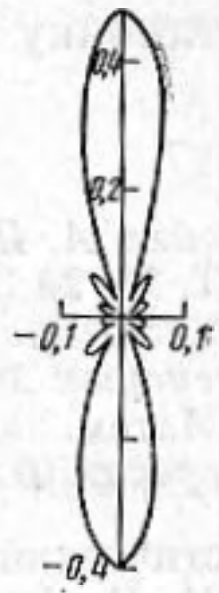
$$\Phi_4(\nu_2) = -2k_2 d \sqrt{\cos^2\theta_0 k_1^2/k_2^2 - 1}\, (r_0^2 + r_{0\varphi}'^2)^{-1/2} \int_0^{2\pi} K_1(k_2 d\rho \sqrt{\cos^2\theta_0 k_1^2/k_2^2 - 1}) \times$$

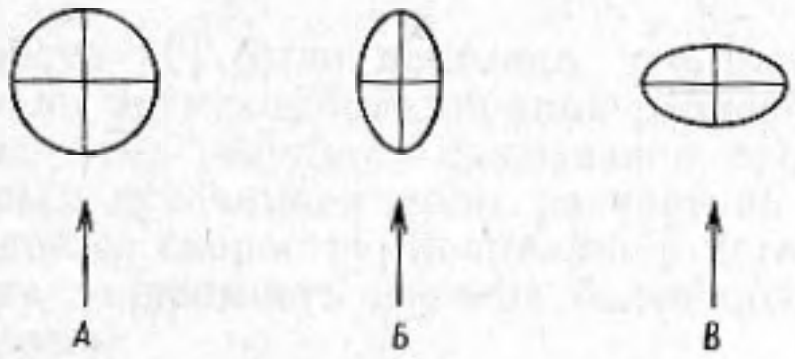
$$\times \rho^{-1} (\tilde{r}_0^2 + \tilde{r}_{0\varphi}'^2)^{1/2} \nu_2(z', \tilde{\varphi}) [r_0^2 - r_0 \tilde{r}_0 \cos(\varphi - \tilde{\varphi}) - \tilde{r}_0 r_{0\varphi}' \sin(\varphi - \tilde{\varphi})]\, d\tilde{\varphi},$$

где K_0, K_1 — функции Макдональда нулевого и первого порядка.

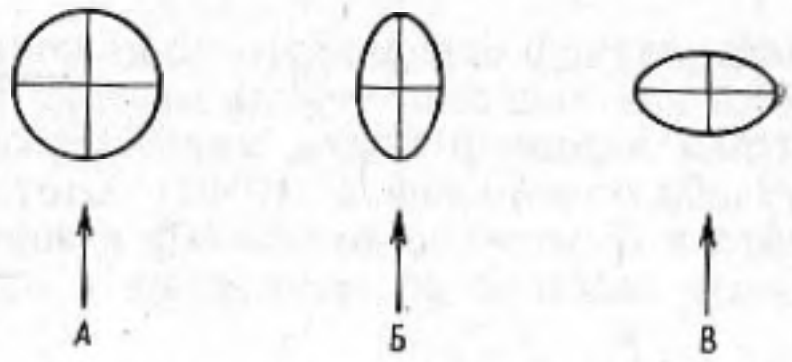
В качестве иллюстрации были проведены расчеты диаграмм рассеяния для сфероида и трехосного эллипсоида с соотношением осей 20 : 2 : 1 (при фиксированных $\varphi_0 = \varphi = 0°$, $\theta_0 = 90°$, $\rho_1 = 1$, $k_1 l = 10$, $\varepsilon = 0{,}1$). Значения $|f(\theta)/l|$ представлены на фиг. 1—4 (А — сфероид, Б, В — эллипсоид); внизу приведены сечения каждого тела вдоль оси z, стрелкой отмечено направление падения волны, наибольшая ось тела расположена горизонтально.

Решение системы уравнений Фредгольма (8) искалось в виде частичной суммы ряда Фурье для каждого фиксированного z'. Далее использовался метод коллокации, приводящий к системе линейных алгебраиче-

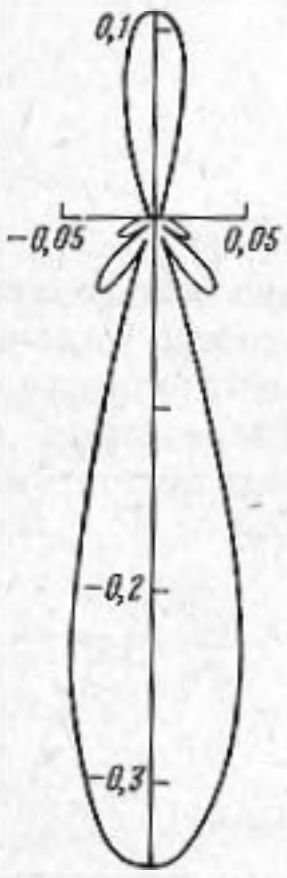


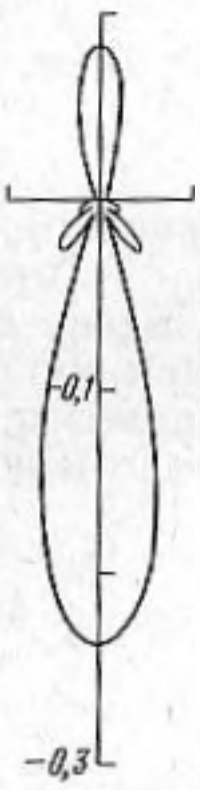


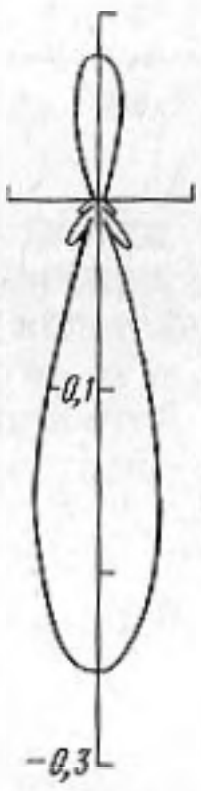
Фиг. 1. Диаграмма рассеяния: $\rho_2=2$, $k_2l=20$

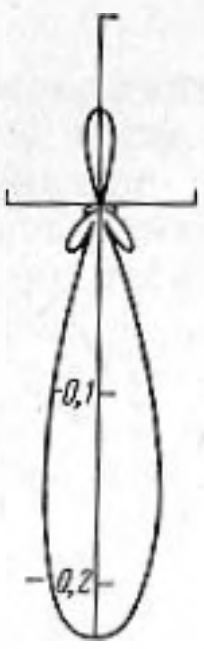


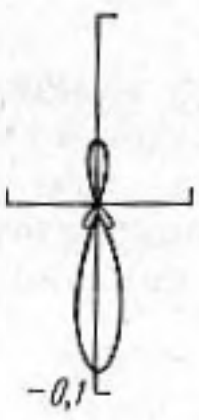
Фиг. 2. Диаграмма рассеяния: $\rho_2=1$, $k_2l=20$

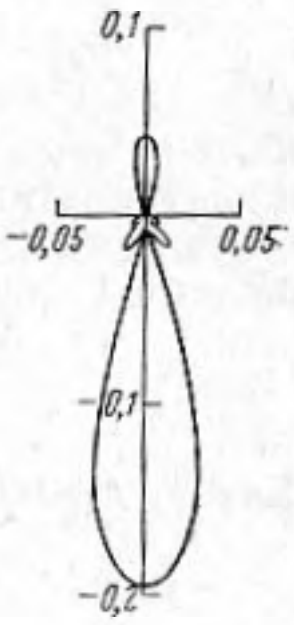


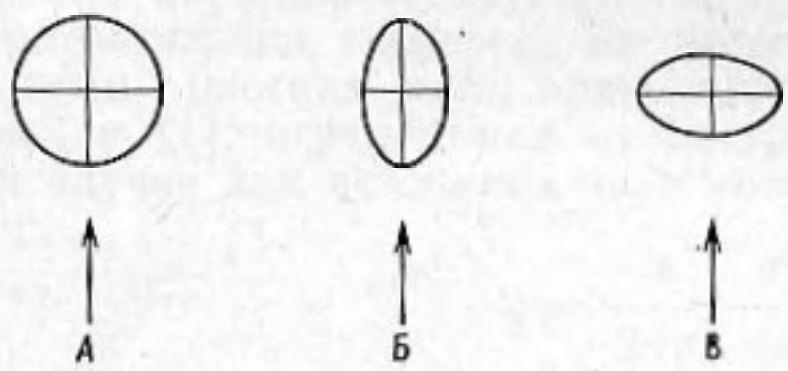




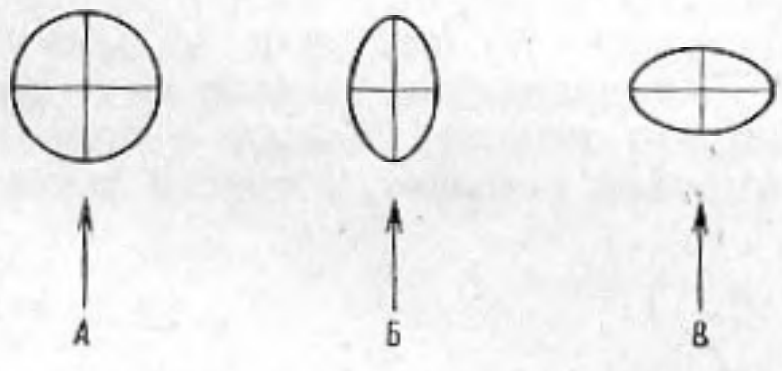








Фиг. 3. Диаграмма рассеяния: $\rho_2=0{,}5$, $k_2l=10$



Фиг. 4. Диаграмма рассеяния: $\rho_2=2$, $k_2l=10$

ских уравнений. Расчет всех интегралов производился по квадратурным формулам Гаусса с числом узлов, равным 10.

Результаты расчетов показывают, что в случае $k_2>k_1$ теневой лепесток больше зеркального, причем разница между ними увеличивается с увеличением ρ_2, при этом амплитуда рассеяния уменьшается. В случае $k_2=k_1$ теневой лепесток меньше зеркального и также разница между ними увеличивается с увеличением ρ_2, при этом амплитуда рассеяния уменьшается. Таким образом, в обоих случаях при увеличении ρ_2 амплитуда рассеяния увеличивается. Различие в расположении эллипсоида относительно падающей волны слабо сказывается на теневой лепесток и в большей

степени на зеркальный, особенно при увеличении ρ_2. В среднем амплитуда рассеяния сфероида больше, чем эллипсоида, что объясняется меньшим объемом тела.

Автор выражает благодарность В. В. Тютекину и М. В. Федорюку за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бойко А. И.* Рассеяние плоских волн тонким телом вращения // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 3. С. 321–325.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.
3. *Федорюк М. В.* Асимптотика волнового потенциала, сосредоточенного на прямой // Матем. заметки. 1984. Т. 36. № 5. С. 673–679.
4. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1, 2. М.: Наука, 1966.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19.VI.1986