АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 4

УДК 534.222.2

ОБРАЩЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ПРИ РАССЕЯНИИ ЗВУКА НА ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ЦИЛИНДРЕ

Лямшев Л. М., Саков П. В.

Рассмотрена задача о нелинейном рассеянии гармонической звуковой волны на пульсирующем с удвоенной частотой круговом цилиндре. При помощи лучевых асимптотик показано возникновение обращения волнового фронта, исследованы его основные характеристики.

При отражении звуковой волны от поверхности, колеблющейся с удвоенной частотой, возможно обращение волнового фронта (ОВФ) (см., например, [1, 2]). Ниже рассматриваются особенности ОВФ при нелинейном рассеянии плоской гармонической звуковой волны пульсирующим акустически жестким цилиндром кругового сечения в безграничной однородной слабопоглощающей среде.

Нелинейное рассеяние звука на совершающей небольшие колебания поверхности характеризуется двумя основными параметрами: числом Маха M_1 звукового поля внешних источников и числом Маха M_2 движения поверхности. Представим давление полного звукового поля p в виде формального ряда по степеням M_1 и M_2:

$$p(\mathbf{r}, t)=\sum_{m,n=1}^{\infty} M_1{}^m M_2{}^n p_{mn}(\mathbf{r}, t). \tag{1}$$

Предметом анализа является комбинационный член p_{11}.

Пульсации поверхности цилиндра g и падающая на цилиндр волна p_i определяют в линейном приближении соответственно поле излучения пульсирующей поверхности p_{01} и полное (падающее плюс рассеянное) поле внешних источников p_{10}. Итак, положим

$$p_i(\mathbf{r}, t)=M_1\rho c^2 \exp(-i\omega_i t-ik_i r\cos\varphi), \tag{2}$$

где (r, φ) — система цилиндрических координат, связанная с осью цилиндра, а c и ρ — соответственно скорость звука и плотность в невозмущенной жидкости. Положим также перемещение поверхности вдоль внешней нормали к невозмущенному положению, характеризующемуся радиусом R, равным

$$g(t)=(M_2/k_i)\sin(2\omega_i t). \tag{3}$$

Комбинационный член p_{11} можно представить в виде суммы поверхностной и объемной компонент:

$$p_{11}(\mathbf{r}, t)=p_S(\mathbf{r}, t)+p_V(\mathbf{r}, t), \tag{4}$$

каждая из которых имеет составляющие на разностной (в данном случае $-\omega_i$) и суммарной ($3\omega_i$) частотах. Поскольку предметом анализа является ОВФ, ограничимся рассмотрением звуковых полей на разностной частоте, символически отражая этот факт индексом «—» в соответствующих обозначениях.

Поверхностная компонента p_S возникает в результате нелинейного взаимодействия линейной составляющей звукового поля внешних источников p_{10} с границей [3—6]. Граничное условие для p_S, полученное из условия неразрывности на границе, позволяет, зная точное решение для p_{10} при помощи метода разделения переменных представить p_S в виде ряда по цилиндрическим волнам.

Для ОВФ характерны высокие частоты,

$$k_iR \gg 1, \tag{5}$$

поэтому для интерпретации полученного решения находится главный (лучевой) член высокочастотной асимптотики. Для этого сначала осуществляется асимптотический переход от суммы по цилиндрическим волнам к интегралу. Далее с использованием асимптотической формулы Дебая для функции Ханкеля становится возможным приближенное вычисление полученного интеграла.

В ближней зоне рассеивателя, при $k_ir \ll (k_iR)^2$, это вычисление осуществляется при помощи метода стационарной фазы. В результате для поля в «освещенной» области получим

$$p_s^-(\mathbf{r}) \sim \left[\left(1-\frac{r^2\sin^2\varphi}{R^2}\right)^{1/2}+\frac{4}{\left(1-\frac{r^2\sin^2\varphi}{R^2}\right)^{1/2}}\right]\exp(-ik_i^{\cdot}r\cos\varphi). \tag{6}$$

Границы «освещенной» области определяются из условия принадлежности стационарной точки области действия асимптотической формулы Дебая:

$$k_iR-k_ir|\sin\varphi| \gg (k_iR)^{1/3}. \tag{7}$$

Как видно из (6), в лучевом приближении в ближней зоне рассеивателя p_s^- представляет собой квазиплоскую волну с переменной вдоль фронта амплитудой, распространяющуюся навстречу падающей волне p_i, т. е. происходит ОВФ [7].

В дальней зоне, при $k_ir \gg (k_iR)^2$, седловая точка отсутствует («расплывается»). В результате упрощения подынтегрального выражения получающийся интеграл берется точно:

$$p_s^-(\mathbf{r}) \sim \left(\frac{i\pi}{2}\right)^{1/2} k_iR\left[4J_0(k_iR\varphi)+\frac{J_1(k_iR\varphi)}{k_iR\varphi}\right]\frac{\exp(-ik_i^{\cdot}r)}{(k_ir)^{1/2}}. \tag{8}$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода n-го порядка.

Как и следовало ожидать по виду поля в ближней зоне, в дальней зоне в направлении назад ($\varphi=0$) формируется максимум; диаграмма направленности имеет вид, характерный для задач рассеяния на плоских экранах.

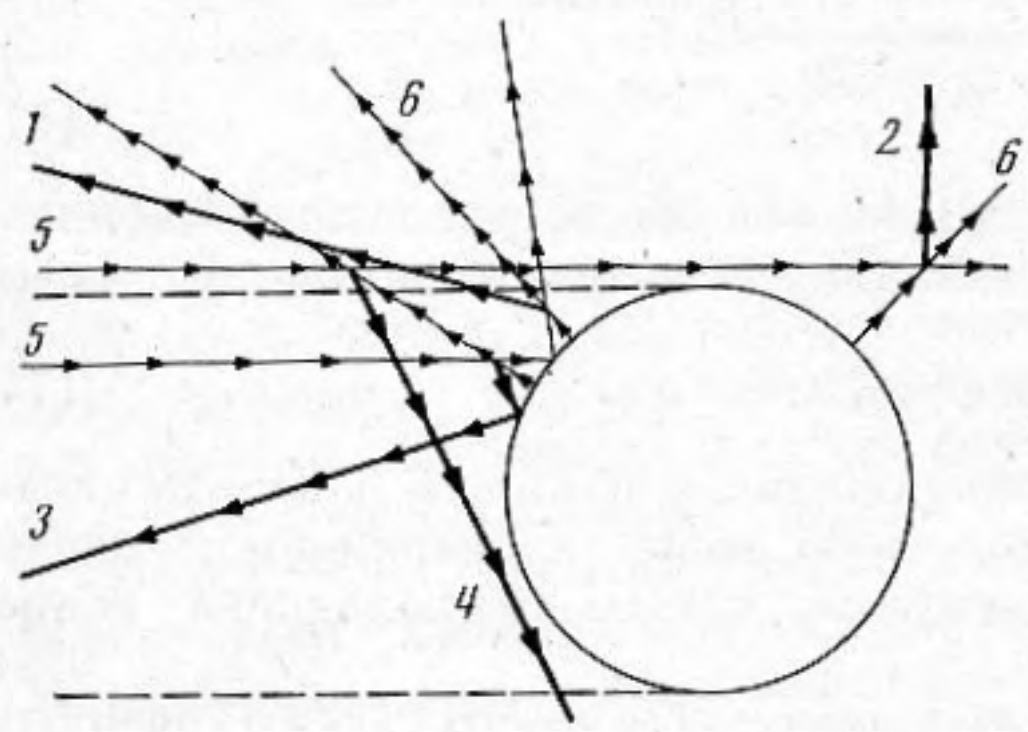
Объемная компонента p_V комбинационного члена p_{11} возникает в результате нелинейного взаимодействия линейных составляющих звукового поля внешних источников p_{10} и звукового поля излучения поверхности p_{01} [6]; для нее справедливо уравнение Вестервельта [8], которое позволяет сразу записать решение для p_V^- в замкнутой форме в виде интеграла по объему от произведения плотности источников на функцию Грина [6]. Последующие действия заключаются в нахождении лучевой асимптотики подынтегрального выражения, после чего несложно выполнить интегрирование по объему.

При нахождении лучевой асимптотики p_V^- при помощи методов, описанных выше, выясняется, что луч, появляющийся в результате нелинейного взаимодействия излучения с полем внешних источников, направлен таким образом, что является как бы зеркальным отражением луча с частотой ω_i от луча с частотой $2\omega_i$ в точке взаимодействия (фиг. 1). Четыре различных луча на фиг. 1 соответствуют четырем различным ситуациям, в зависимости от того, возникают в результате взаимодействия уходящие (*1* и *2*) или приходящие (*3* и *4*) лучи, и есть при этом рассеяние на поверхности (*1* и *3*), или его нет (*2* и *4*). Такое поведение лучей, возникающих при объемном нелинейном взаимодействии, приводит к тому, что чем ближе к поверхности расположена точка взаимодействия, тем точнее появляющийся в этой точке луч будет направлен назад по отношению к падающему лучу (фиг. 2). Совокупность лучей, образовавшихся при нелинейном взаимодействии вблизи поверхности рас-

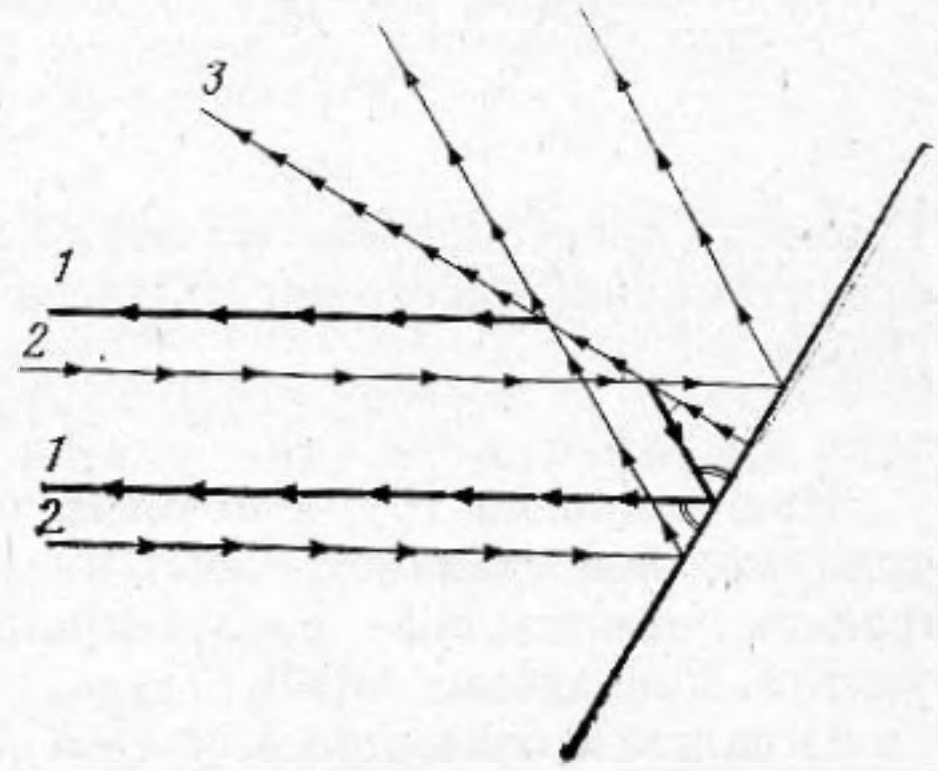
сеивателя, образует квазиплоскую волну с переменной вдоль фронта амплитудой, распространяющуюся в направлении назад, подобно тому, как это происходило при поверхностном нелинейном взаимодействии. Толщина слоя может быть оценена из условия синфазного сложения появляющихся в нем лучей в дальней зоне; она составляет доли длины волны. Используя эту оценку, легко получить оценку вклада эффекта ОВФ в нелинейное поле в дальней зоне:

$$\delta p_V^- \approx -2i\beta\left(\frac{i\pi}{2}\right)^{1/2} k_i R J_0(k_i R\varphi)\,\frac{\exp(-ik_i^* r)}{(k_i r)^{1/2}}. \qquad (9)$$

Для того, чтобы нелинейное поле имело накапливающийся по мере удаления от рассеивателя характер, необходимо выполнение условий синхронизма. Очевидно, что они могут быть выполнены только с участием



Фиг. 1. Объемное взаимодействие звуковых полей: *1–4* – лучи, образовавшиеся в результате взаимодействия поля внешних источников *5* с излучением *6*.



Фиг. 2. Объемное взаимодействие звуковых полей вблизи поверхности рассеивателя: *1* – лучи, образовавшиеся в результате взаимодействия поля внешних источников *2* с излучением *3*

уходящих волн (лучи *1* и *2* на фиг. 1), причем для лучей, появившихся при непосредственном взаимодействии падающей волны p_i и излучения p_{01} (луч *2*), условия синхронизма выполняются лишь в узкой области в направлении вперед. Поэтому, определяя величину нелинейного взаимодействия в направлении вперед, непосредственное взаимодействие падающей и излученной волн мало в остальных направлениях по сравнению со взаимодействием рассеянной и излученной волн.

В ближней зоне условия синхронизма выполняются лишь на луче $\varphi=0$. В лучевом приближении

$$p_V^-(r,0) \sim -i\beta(k_i R)^{1/2}\,\frac{(2r/R-1)^{1/2}-(R/r)^{1/2}}{(2/k_i R)+(1/k_i r)} \times \frac{\exp(-ik_i^* r)}{(k_i r)^{1/2}}, \qquad (10)$$

$$R \leqslant r \leqslant \infty, \quad \alpha(2\omega_i) r \ll 1,$$

где $\alpha(\omega)$ – коэффициент поглощения на частоте ω.

В дальней зоне наступает синхронизм между рассеянным и излученным полями. В зависимости от величины поглощения в двух различных предельных случаях получаем

$$p_V^-(\mathbf{r}) \sim -i\beta\cdot k_i R\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{1/2} \exp\left[2ik_i R\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\right]\exp(-ik_i^* r), \qquad (11)$$

$$\alpha(2\omega_i) r \ll 1, \text{ и}$$

$$p_V^-(\mathbf{r}) \sim -i\beta\cdot k_i R\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{1/2} \exp\left[2ik_i R\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\right]\frac{\exp(-ik_i^* r)}{[\alpha(2\omega_i) r]^{1/2}}, \qquad (12)$$

$$\alpha(2\omega_i) r \gg 1, \; 1/\alpha(2\omega_i) \gg (k_i R)^2.$$

Полученные в лучевом приближении выражения для p_V^- (11) и (12) имеют ту же зависимость от угла, что и лучевое приближение для рассеянного при падении p_i поля. Это связано с тем, что p_V^- формируется в дальней зоне. Нетрудно показать, что это совпадение носит более общий характер.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы: при рассеянии звука пульсирующим с удвоенной частотой круглым цилиндром, радиус которого много больше длины звуковой волны, происходит ОВФ; ОВФ возникает как вследствие поверхностного нелинейного взаимодействия, так и в результате объемного взаимодействия в узком, порядка длины волны, прилегающем к поверхности слое; амплитуды обращенных волн в обычных условиях малы вследствие локального характера соответствующих взаимодействий (что приводит к невозможности накопления эффекта). Добиться их увеличения можно за счет увеличения интенсивности этих взаимодействий; в ближней зоне лишь на луче $\varphi=0$ нелинейное поле имеет накапливающийся характер; в дальней зоне условия синхронизма выполняются для всех направлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В.* Обращение волнового фронта. М.: Наука, 1985, 247 с.
2. *Лямшев Л. М.* Некоторые особенности рассеяния и излучения звука периодически движущимися пластинами и оболочками // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 3. С. 400–402.
3. *Censor D.* Scattering by time varying obstacle // J. Sound and Vib. 1972. V. 25. № 1. P. 101–110.
4. *Censor D.* The generalized Doppler effect and applications // J. Franklin Inst. 1973. V. 295. № 2. P. 103–116.
5. *Censor D.* Harmonic and transient scattering from time varying obstacles // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. V. 76. № 5. P. 1527–1534.
6. *Piquette Jean C., Van Buren A. L.* Nonlinear scattering of acoustic waves by vibrating surfaces // J. Acoust. Soc. Amer. 1984. V. 76. № 3. P. 880–889.
7. *Пилипецкий Н. Ф., Сударкин А. И., Шкунов В. В.* Обращение волнового фронта мерцающей поверхностью // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 2. С. 835–836.
8. *Westervelt P. J.* Scattering of sound by sound // J. Acoust. Soc. Amer. 1957. V. 26. № 4. P. 199–203.
9. *Rogers P. H.* Comments on Scattering by time varying obstacle // J. Sound and Vib. 1973. V. 28. № 4. P. 764–768.
10. *Piquette Jean C., Van Buren A. L.* Comments on Harmonic and transient scattering from time varying obstacles // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 79. № 1. P. 179–180.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4.I.1987