АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 4

УДК 534.2:532+533.6.011

АКУСТИКА ТЕЧЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ БОЛЬШОЕ ЧИСЛО КОРОТКИХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Макаров С. Н., Филиппов Б. В.

Теоретически рассмотрено описание течения идеального газа, содержащего большое число коротких волн конечной амплитуды, при помощи функции распределения. Построено кинетическое уравнение; для него получено общее решение краевой задачи. Исследован пример с граничным условием на поверхности параболоида вращения.

Изучение поля течения, включающего большое число коротких волн конечной амплитуды, необходимо в некоторых практических задачах сверхзвуковой аэродинамики. В настоящей работе предложен простой метод расчета подобных течений. Для характеристики последних вводится плотность математического ожидания числа волн f в пространстве состояний (функция распределения). Динамика системы волн описывается кинетическим уравнением для f, которое учитывает изменение функции распределения за счет эволюции отдельных волн в соответствии с их динамическими уравнениями. Вид отдельной волны задается в рамках второго приближения теории волн конечной амплитуды [1]. Каждая из волн считается квазиплоской и локально имеет форму плоской треугольной N-волны с произвольными фазами [2]. При определении средних значений компонент тензора плотности потока импульса учитываются малые первого порядка по интенсивности волны. Для учета малых второго порядка, к которым относится и конвективный поток импульса, необходимо привлечь газодинамическое приближение теории волн конечной амплитуды [1, 3].

Рассмотрим течение идеального газа с равновесными давлением p_0, плотностью ρ_0, скоростью звука c_0 и показателем адиабаты γ. Поведение плоских волн конечной амплитуды описывается известным уравнением простых волн $v_t+(\gamma+1)vv_x/2=0$ для скорости течения $v=2u/(\gamma+1)$. Здесь $X=x-c_0t$ — сопутствующая координата. Параметры течения связаны соотношениями линейной акустики: $p-p_0\sim\rho_0c_0v$, $\rho-\rho_0\sim(\rho_0/c_0)v$. Уравнение простых волн допускает слабые решения, совместные с законом сохранения $\int v=\mathrm{const}$. Асимптотическое решение задачи Коши для первоначально двухполярного импульса на достаточно больших временах имеет вид треугольной N-волны [2]:

$$u=X/(t+t_0),\quad -\sqrt{2a^-(t+t_0)}<X<\sqrt{2a^+(t+t_0)};\qquad (1)$$

$u=0$, иначе.

Здесь $a^\pm$ — площади положительной и отрицательной фазы в начальный и последующие моменты времени (остальные данные о начальном условии утеряны); t_0 — постоянная. Выражение (1) одновременно есть слабое решение уравнения простых волн.

Ниже рассматриваем решения вида (1). Форма треугольной N-волны определена тремя величинами: площадями фаз $a^\pm$ и амплитудой скачка сжатия b^+. Величина b^- есть $(a^-/a^+)^{1/2}b^+$. В классе волн вида (1) можно снова ставить задачу Коши. Если при $t=0$ задана N-волна с произвольными $a_0^\pm$, b_0^+, решение при $t>0$ имеет вид (1) с $t_0=2a_0^+/b_0^{+2}$. Функции $a^\pm(t)$, $b^+(t)$ определяются как

$$a^\pm=a_0^\pm,\quad \dot b^+=-\frac{b^{+3}}{4a^+},\quad b^+=\sqrt{\frac{2a_0^+}{t+2a_0^+/b_0^{+2}}}.\qquad (2)$$

Постоянные $a^{\pm}$ связаны с импульсом избыточных давлений положительной или отрицательной фазы волны $I_p^{\pm}$ и полным импульсом избыточных давлений I_p. Считая, что искажение профиля мало на масштабах порядка периода волны, находим

$$I_p^{\pm} \sim \frac{2}{\gamma+1}\rho_0 a^{\pm}, \quad I_p \sim \frac{2}{\gamma+1}\rho_0 (a^+ - a^-). \tag{3}$$

Рассмотрим сначала общий вид кинетического уравнения для системы невзаимодействующих волн с произвольными динамическими характеристиками $a_1(t), \ldots, a_n(t)$. Считаем известными уравнения движения $\dot{a}_i = q_i(a_1, \ldots, a_n, t)$, $i \leqslant n$. Каждой из волн сопоставим координату $\mathbf{x}$ и вектор скорости $\mathbf{c}$. Введем по аналогии с кинетической теорией функцию распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, a_1, \ldots, a_n, t)$ так, что величина $f\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{c}\, da_1 \ldots da_n$ есть вероятное число волн в элементарном объеме пространства состояний W, $(\mathbf{x}, \mathbf{c}, a_1, \ldots, a_n) \in W$.

Получим кинетическое уравнение для функции распределения. Зафиксируем в пространстве W некоторый объем. Изменение числа волн в этом объеме при отсутствии их взаимодействия равно потоку величины f через его поверхность. Последний имеет вид $f\mathbf{V}$, где $\mathbf{V} = (\mathbf{c}, \dot{\mathbf{c}}, \dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$ — вектор скорости потока. В локальной форме имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_W (f\mathbf{V}) = 0. \tag{4}$$

Дивергенция здесь берется во всем пространстве состояний W.

Вернемся к исходной формулировке. Каждую из волн в произвольной точке $\mathbf{x}$ считаем локально-плоской треугольной N-волной с характеристиками $a^{\pm}$, $b^+ = b$. Плоской N-волне удобно сопоставить в качестве скорости скорость точки перемены фазы, т. е. звуковую. Вектор скорости $\mathbf{c}$ есть $c_0\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ — единичный вектор нормали к поверхности фронта. Уравнение (4) для функции распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, a^{\pm}, b, t)$ имеет с учетом (2) вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}\nabla f - \frac{b^3}{4a^+}\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{3b^2}{4a^+} f. \tag{5}$$

Для уравнения (5) можно ставить начальную и краевую задачи. Больший интерес представляет последняя. Рассмотрим стационарную задачу с граничным условием f_0 на некоторой поверхности и получим ее решение. Прямая L, проходящая через точку $\mathbf{x}$ в направлении вектора $\mathbf{c}$, пересекает поверхность в точке $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - (l/c_0)\mathbf{c}$, где $l = l(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ — характеристическая координата. Приводя уравнение (5) к однородному и интегрируя вдоль характеристик, имеем

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, a^{\pm}, b) = \left(\frac{2a^+}{2a^+ - lb^2/c_0}\right)^{3/2} f_0\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}, a^{\pm}, \sqrt{\frac{2a^+ b^2}{2a^+ - lb^2/c_0}}\right), \tag{6}$$

и $f = 0$, если прямая L не пересекает поверхность. В нестационарном случае необходимо дополнительно положить $f(t) = f_0(t - l/c_0)$.

Считая функцию распределения известной, определим средние значения компонент тензора плотности импульса p_{ij} в точке $\mathbf{x}$. За единицу времени через единичную площадку с нормалью $\mathbf{n}$ в одном направлении проходит $(\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}) f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, a^{\pm}, b, t)$ волн со значениями скоростей $\mathbf{c}$ и параметрами $a^{\pm}, b$. Каждая из них обладает импульсом $(I_p/c_0)\mathbf{c}$, где I_p определено формулой (3). Поэтому средние значения компонент имеют вид

$$\langle p_{ij} \rangle = \frac{1}{c_0} \int \int_0^{\infty} \int da^+\, da^-\, db \int_{|\mathbf{c}| = c_0} d\mathbf{c}\, c_i c_j f I_p; \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{7}$$

с функцией распределения из (6). Кроме того, имеет место конвективный поток импульса за счет переноса массы [4]. Он является малой

второго порядка относительно интенсивности волны и здесь не рассматривается.

Рассмотрим в качестве примера стационарную задачу с граничным условием на внешней поверхности параболоида вращения с осью Oz, вершиной в начале координат и фокусным расстоянием $d/2$. Функцию f_0 представим в виде

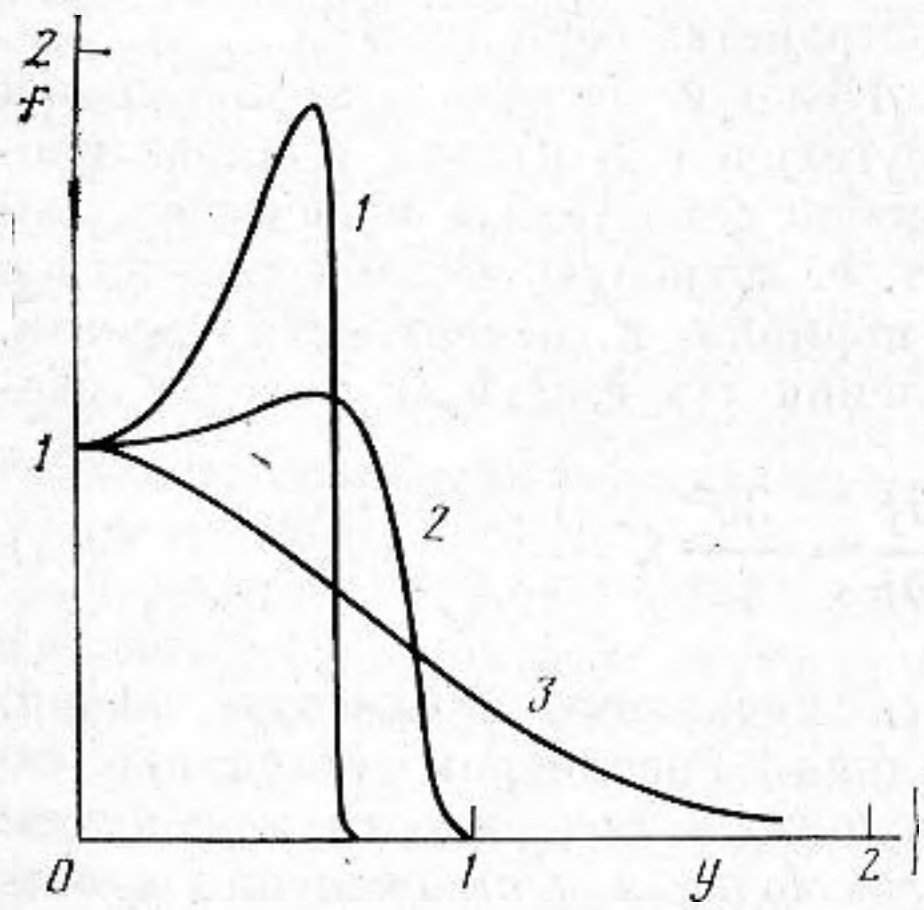
$$f_0=A\delta(\mathbf{c}-c_0\mathbf{n}(Z))\,\delta(a^{\pm}-a_0^{\pm})\exp\left(-\frac{b^2}{\sigma^2}\right), \tag{8}$$

где A, σ — постоянные; $\mathbf{n}(Z)$ — единичная внешняя нормаль к поверхности параболоида в точке с осевой координатой Z. Считаем, что каждый элемент поверхности излучает плоские волны в направлении его нормали.

В цилиндрической системе координат решение краевой задачи в произвольной точке r, z имеет вид

$$f=AG(r,z)\left(\frac{2a^+}{2a^+-lb^2/c_0}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{2a^+b^2/\sigma^2}{2a^+-lb^2/c_0}\right)\delta(\mathbf{c}-c_0\mathbf{n}(r,z))\,\delta(a^{\pm}-a_0^{\pm}). \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{n}(r,z)$ — нормаль к поверхности параболоида, продолжение которой проходит через точку r,z; l — расстояние до поверхности вдоль нормали. Множитель G связан с присутствием δ-функции по скоростям в граничном условии. Он определяет геометрическую расходимость функции распределения и равен $R_1R_2/(R_1+l)(R_2+l)$, где $R_{1,2}$ — главные радиусы кривизны поверхности в основании вектора $\mathbf{n}(r,z)$.



Зависимость распределения по амплитудам от безразмерного параметра $y=b/N(l_0)$. *1–3* – соответствуют $N(l_0)/\sigma=1$; $l/l_0=0$, 1, 2 и иллюстрируют накапливание волн в области $b\sim0$

По мере удаления от поверхности происходит отклонение распределения по амплитудам (8) от нормального закона. Из формулы (2) следует, что для треугольной N-волны с произвольным b_0^+ амплитуда на расстоянии $l>0$ не превосходит величину $N(l)=(2a^+c_0/l)^{1/2}$. Последнее означает, что независимо от начального распределения на расстоянии l от поверхности имеются только те волны, для которых $0\leqslant b\leqslant N$. Это замечание связано со следующим свойством волн вида (1): чем больше амплитуда волны, тем быстрее она убывает.

Введем характерный масштаб течения l_0. На фигуре представлена зависимость распределения по амплитудам от безразмерного параметра $y=b/N(l_0)$. Площадь под кривой $f(b)$ или общее число волн сохраняется.

Определим средние значения компонент тензора плотности потока импульса p_{rr}, p_{zz} в области, близкой к оси параболоида, т. е. в конусе с осью $-Oz$ и углом раствора, α, $\operatorname{tg}\alpha\ll1$. Здесь можно положить

$$l\sim|z|,\quad G\sim(1+|z|/d)^{-2},\quad \mathbf{n}(r,z)\sim(r/(d+|z|),-1).$$

При подстановке решения (9) в (7) интегралы по скоростям и параметрам $a^{\pm}$ находятся сразу. Интеграл по амплитудам всегда равен $\sqrt{\pi}\,\sigma/2$. Поэтому имеем

$$\langle p_{rr}\rangle=\frac{A\sqrt{\pi}\,\sigma\rho_0c_0(a_0^+-a_0^-)r}{(\gamma+1)(1+|z|/d)^2(d+|z|)}$$

$$\langle p_{zz}\rangle = -\frac{A\sqrt{\pi}\,\sigma\rho_0 c_0 (a_0^+ - a_0^-)}{(\gamma+1)(1+|z|/d)^2}. \qquad (10)$$

В данном случае тот же результат дает линейная теория, когда профиль волны считается неизменным, и нормальное распределение по амплитудам сохраняется на любом расстоянии от поверхности. Это объясняется тем, что величина I_p не зависит явно от амплитуды волны, а именно в распределении по амплитудам проявляется различие между линейной и нелинейной постановкой. Для тензора плотности потока импульса последнее имеет место при учете малых второго порядка относительно интенсивности волны.

Если граничное условие и форма поверхности имеют более сложный вид, для определения средних значений $\langle p_{ij}\rangle$ можно привлечь численные методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
3. *Макаров С. Н., Филиппов Б. В.* К расчету волн конечной амплитуды в газодинамическом приближении // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 184–187.
4. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию 30.VI.1986