АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 4

УДК 534.213

ВЛИЯНИЕ ИЗБЫТОЧНОСТИ ДАННЫХ НА СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ

Сасковец А.В.

Рассматривается вопрос расширения области сходимости предложенного ранее итерационного алгоритма решения обратных задач рассеяния при использовании избыточных экспериментальных данных. Получено выражение для радиуса сходимости такого алгоритма. Показано, что в некоторых случаях выгоднее решать избыточную (переопределенную) задачу с точки зрения необходимого времени счета. Основные выводы подтверждаются с помощью модельного эксперимента на ЭВМ.

В настоящее время известно довольно много итерационных процессов решения обратных задач (например, [1, 2]), обладающих различными областями применимости. При их рассмотрении, однако, мало внимания уделялось определению границ применимости соответствующего алгоритма при использовании избыточных данных, т. е. количества независимых измерений, превышающего минимально необходимое для определения соответствующей задачи.

Покажем, что при использовании для решения обратных задач алгоритмов, сводящихся к [3]:

$$Q[E-\omega^2\xi^j R]^{-1}\omega^2\xi^{j+1}U_0=u, \tag{1}$$

проведение избыточного количества измерений позволяет расширить область применимости (1) по сравнению с безызбыточной задачей, когда радиус сходимости алгоритма (1) определяется соотношением [3]

$$\left|\frac{u_{\text{рас}}}{U_0}\right|<1. \tag{2}$$

В (1), (2) Q, R — соответственно операторы распространения поля из области рассеяния $\mathcal{R}$ в область приема и внутри $\mathcal{R}$, E — тождественный оператор, ω — частота, ξ —описывает искомую неоднородность, j — номер итерации, U_0 — зондирующее (первичное) облучение на $\mathcal{R}$, а $u_{\text{рас}}$ — рассеянное поле в $\mathcal{R}$. Из (1), учитывая диагональность оператора ξ, поле внутри $\mathcal{R}$ можно записать в виде

$$T_k=(E-\omega_k^2\xi^j R_k)^{-1}U_{0k}\omega_k^2\xi^{j+1},\quad k=1\div L, \tag{3}$$

где индекс k — нумерует различные эксперименты, каждый из которых полностью определяет задачу (k — индекс избыточности).

Пусть ξ_T — точное значение искомой функции, а $\Delta_1\xi$ и $\Delta_2\xi$ — значения ошибок определения ξ_T на двух последовательных шагах итераций. Тогда (3) можно переписать следующим образом: $T_k=[E-\omega_k^2(\xi_T-\Delta_1\xi)R_k]^{-1}\times$ $\times U_{0k}\omega_k^2(\xi_T-\Delta_2\xi)$, $k=1\div L$, или, произведя тождественные преобразования,

$$\Delta_1\xi R_k T_k=-U_{0k}\Delta_2\xi,\qquad k=1\div L. \tag{4}$$

Учитывая, что для сходимости алгоритма (3) должно выполняться соотношение $\Delta_2\xi<\Delta_1\xi$, из (4) получаем условие сходимости итерационного алгоритма задачи с избыточностью данных в виде

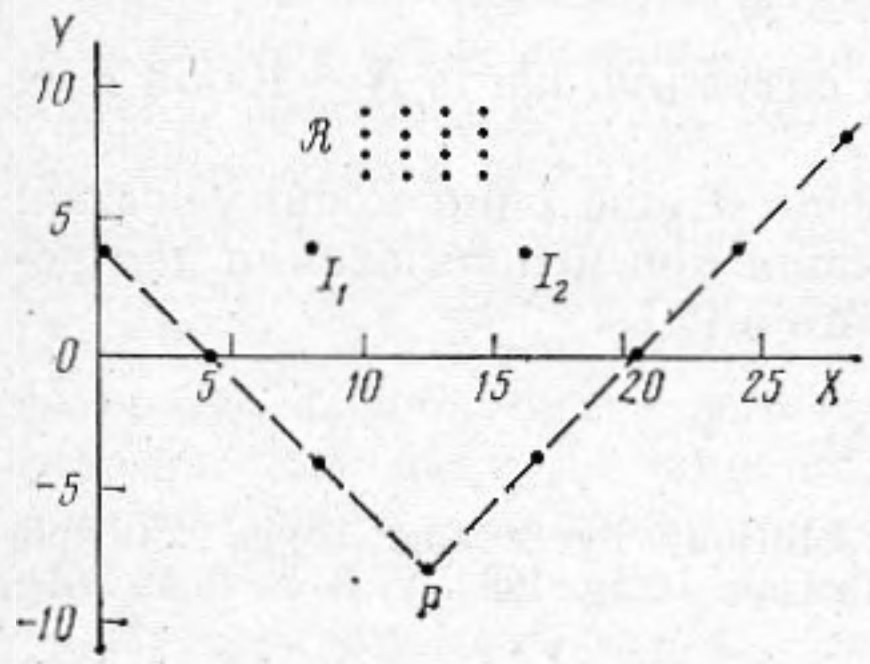
$$\left| \frac{\sum_{k=1}^{L} U_{0k}^{+} R_k T_k}{\sum_{k=1}^{L} U_{0k}^{+} U_{0k}} \right| < 1, \tag{5}$$

где U_{0k}^{+} — оператор эрмитово-сопряженный U_{0k}.

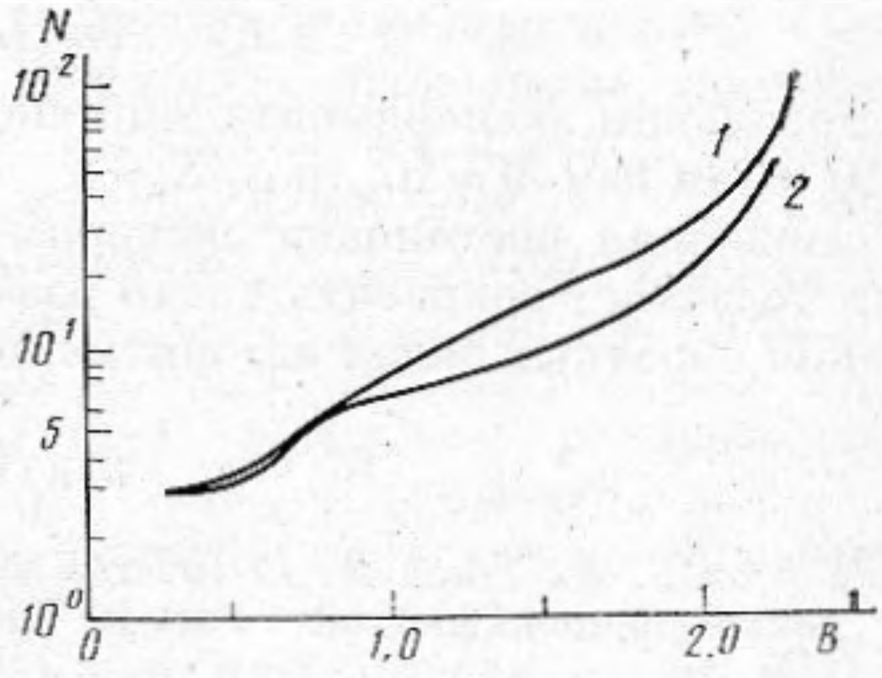
Из (5) для больших L, учитывая, что величина в знаменателе (5) знакопостоянна, а в числителе — знакопеременна, окончательно оценку области сходимости можно представить как

$$\left| \frac{u_{\text{рас}}}{U_0} \right| \leqslant \sqrt{L}. \tag{6}$$

Из (6) следует, что введение избыточного числа измерений позволяет расширить область сходимости алгоритмов типа (3) (см. (2)).



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Схема расположения излучателя I, рассеивателей $\mathcal{R}$ и приемников P в модельном эксперименте

Фиг. 2. Зависимость числа шагов итерационного алгоритма $Q+Q[E-\omega^2\xi^j R]^{-1}\omega^2\xi^{j+1}U_0 = Q^+u$ от величины B, характеризующей силу рассеивателей, для различных значений избыточности. 1 – $L=2$, 2 – $L=3$

Для проверки полученного результата был проведен модельный эксперимент на ЭВМ. При этом использовалась модель, представленная на фиг. 1. Здесь единицей измерения по осям служит минимальная из использовавшихся длин волн; $P_1 \div P_8$ — точки приема; I_1, I_2 — точечные излучатели, характеризуемые единичной амплитудой и частотой, которую можно варьировать. Область рассеяния $\mathcal{R}$ состоит из 16 точечных рассеивателей, комплексные коэффициенты переизлучения которых описываются квазислучайной последовательностью с гауссовой статистикой. Задание различных параметров распределения коэффициентов позволяло изменять величину $|u_{\text{рас}}/U_0|$.

Для решения обратной задачи сначала моделировалась прямая и полученные в ходе ее численного решения данные использовались как исходные при решении обратной. Переопределенная система решалась по методу наименьших квадратов.

Задача рассматривалась для случаев $L=2$, когда использовались длины волн облучения $\lambda_1=1{,}0$ и $\lambda_2=1{,}3$ и $L=3$ – $\lambda_1=1{,}0$; $\lambda_2=1{,}3$; $\lambda_3=1{,}6$. Относительная точность восстановления ξ задавалась на уровне 1%. Полученные в модельном эксперименте зависимости числа шагов итерационного процесса (1) для переопределенной задачи от величины, характеризующей силу рассеивателей:

$$B = \max_{i,m} \left| \frac{u_{im}}{U_{0im}} \right|,$$

(u_{im} — рассеянное поле в точке, соответствующей i-му рассеивателю, полученное в m-м независимом измерении; U_{0im} — первичное поле в той же точке) представлены на фиг. 2.

Как показал модельный счет, реализация избыточной задачи имеет некоторые существенные преимущества перед непереопределенной задачей помимо расширения области сходимости. Во-первых, такая постановка эксперимента позволяет избавиться от неоднозначности решения связанной с существованием «рассеивателей-двойников», неотличимых по полю на данной приемной апертуре от истинных [4]. Кроме того, в некоторых случаях выгоднее решать избыточную задачу и с точки зрения сокращения времени счета. Так, если предположить, что безызбыточная задача сходится за N_1 шагов итераций, а избыточная за N_2 шагов, достигая одинаковой точности восстановления рассеивателя, то общее число операций в безызбыточной задаче $S_1 \sim N_1 M^4$, где M — число точечных рассеивателей или коэффициентов, описывающих данный непрерывный рассеиватель. В избыточной задаче $S_2 \sim N_2(L+1)(1+L/M)M^4$. Следовательно, имеет место соотношение

$$\frac{S_1}{S_2} \sim \frac{N_1}{N_2(L+1)(1+L/M)}.$$

В модельном эксперименте типичной была ситуация, когда $N_1 \sim 100$, а $N_2 \sim \sim 10$ и так как $M=16$, то $S_1/S_2 \sim 2$.

Подобная постановка эксперимента имеет и еще одно преимущество: она позволяет сократить число разбиений поля при использовании для решения обратных задач алгоритма, описанного в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Johnson S. A., Tracy M. L.* Inverse scattering solutions by a sinc basis, multiple source, moment method – Part I.: Theory // Ultrason. Imag. 1983. V. 5. № 6. P. 361–375.
2. *Prosser R. T.* Formal solution of inverse scattering problem // J. Math. Phys. 1976. V. 17. № 10. P. 1775–1779.
3. *Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В.* Итерационный алгоритм решения обратной задачи рассеяния // Вестн. МГУ. Физика, астрономия. 1982. Т. 23. № 6. С. 87–89.
4. *Сасковец А. В.* Восстановление характеристик сильных неоднородностей по данным акустического рассеяния: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: М.: 1984. 139 с.
5. *Байков С. В., Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В.* Расширение области сходимости итерационного алгоритма решения обратной задачи рефракции // Вестн. МГУ. Физика, астрономия. 1982. Т. 23. № 6. С. 22–25.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
30.VII.1986