11. *Minnaert M.* On muscial air bubbles and the sounds of running water // Phyl. Mag. 1933 V. 16. P. 235.
12. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.–Л.: Гостехиздат. 1947. С. 591.
13. *Маргулис М. А.* Основы звукохимии. М.: Высшая школа, 1984.
14. *Рой Н. А.* Возникновение и протекание ультразвуковой кавитации // Акуст. журн. 1957. Т. 3. № 1. С. 3–18.
15. *Журавлев А. И., Акопян В. Б.* Ультразвуковое свечение. М.: Наука. 1977. С. 54.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
24.XI.1986

---

УДК 534.222

# ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СПЕКТРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИКИ ИНТЕНСИВНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ШУМОВ

***Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Прончатов-Рубцов Н. В.***

Известно, что при распространении интенсивного акустического шума в нелинейной среде искажаются все статистические характеристики волны – вероятностное распределение поля, высшие моменты, кумулянты и энергетический спектр. Для описания процессов нелинейного переноса энергии по частотному диапазону наиболее информативной характеристикой волны является ее спектр.

Самовоздействие плоского интенсивного стационарного шума $P(x, t)$ в нелинейной среде без дисперсии описывается на основе уравнения Бюргерса [1], из которого могут быть получены аналоги уравнения Кармана-Ховарта [2] для ковариационной функции шумовой волны $B(x, \tau)$ и ее энергетического спектра $S(\omega, x)$:

$$\frac{\partial B(x,\tau)}{\partial x}+\frac{\beta}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\varkappa_3(0,0,\tau;x)-\varkappa_3(0,\tau,\tau;x)\right]=2\mu\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}B(x,\tau), \tag{1}$$

$$\frac{\partial S(\omega,x)}{\partial x}=\frac{i\beta\omega}{2}\left(G_{2,1}(\omega,x)-G_{1,2}(\omega,x)\right)-2\mu\omega^2S(\omega,x), \tag{2}$$

где $\beta$ и $\mu$ – коэффициенты нелинейности и диссипации среды, $x$ – расстояние от входа в среду, $\varkappa_3(0, 0, \tau; x)$ и $\varkappa_3(0, \tau, \tau; x)$ – третьи кумулянтные функции процесса $P(x, t)$ ($\varkappa_3(0, 0, \tau; x)=\langle P(x, t), P(x, t), P(x, t+\tau)\rangle$, $\varkappa_3(0, \tau, \tau; x)=\langle P(x, t), P(x, t+\tau), P(x, t+\tau)\rangle$, $\langle P(x, t)\rangle=0$), а $G_{2,1}(\omega, x)$ и $G_{1,2}(\omega, x)$ – высшие спектральные функции третьего порядка, связанные с кумулянтными функциями фурье-преобразованием [3]:

$$G_{1,2}(\omega,x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varkappa_3(0,\tau,\tau;x)\exp(i\omega\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

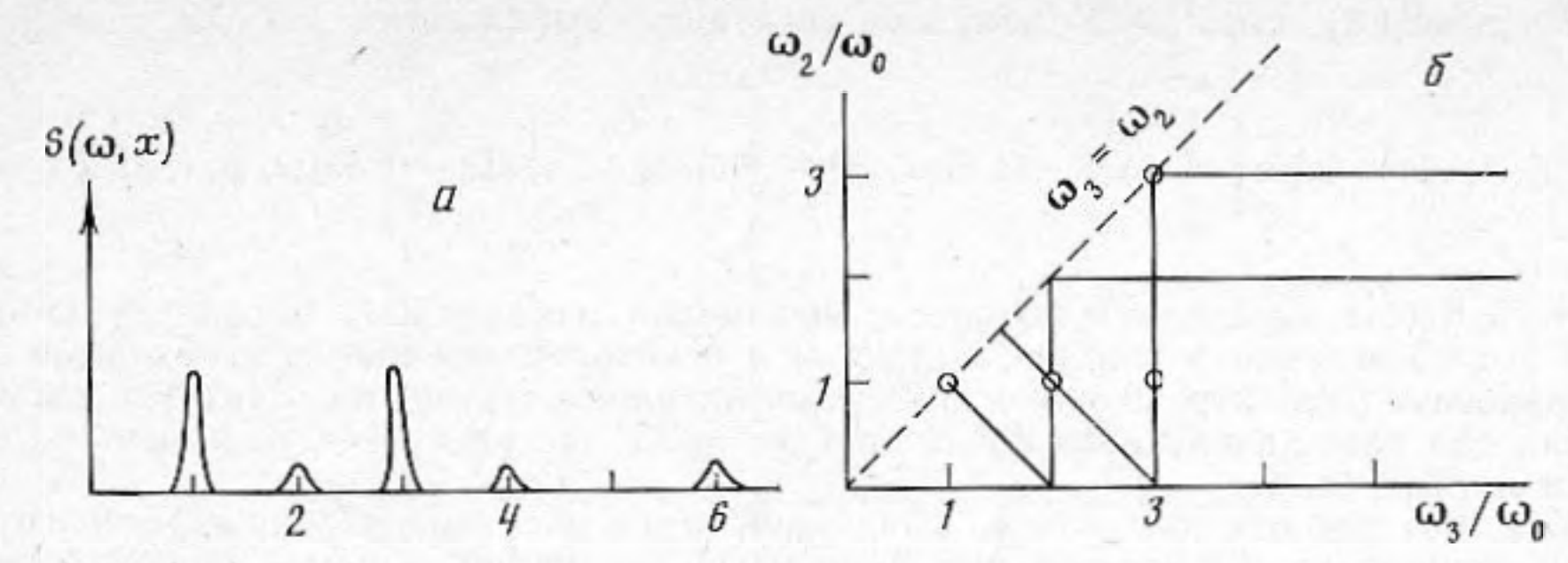
$$G_{2,1}(\omega,x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varkappa_3(0,0,\tau;x)\exp(i\omega\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

В силу нелинейности исходного уравнения Бюргерса уравнения (1), (2) оказываются незамкнутыми: уравнение (1) содержит третьи кумулянтные функции, а в уравнение (2) входят высшие спектральные функции. Таким образом, для определения спектра шума требуется информация о поведении высших спектров. Отметим, что выражение для спектра можно получить и без привлечения высших спектров на основе точного решения уравнения Бюргерса [1, 4]. Однако такой подход не позволяет проследить за предысторией образования новых спектральных компонент, что удается сделать, рассматривая эволюцию биспектра.

Покажем это на примере взаимодействия двух гауссовых квазимонохроматических волн с частотами $\omega_0$ и $3\omega_0$ и одинаковыми дисперсиями $\sigma^2$. Ограничимся рассмотрением начального этапа распространения, когда разрывы в шумовой волне еще не образовались и затуханием можно пренебречь. Выражение для спектра в приближении однократного взаимодействия гармоник имеет вид [1]

$$S(\omega,x)=S_0(\omega)+\frac{\beta^2\omega^2x^2}{2}\left(S_0(\omega)\otimes S_0(\omega)-2\sigma^2S_0(\omega)\right), \tag{5}$$

где $S_0(\omega)$ – спектр на входе в среду, $\otimes$ – знак операции свертки. Качественный вид спектра для нашего примера приведен на фигуре, *а*. Как видно из (5) и фигуры,




при самовоздействии происходит генерация новых спектральных комплексов вблизи частот $2\omega_0$, $4\omega_0$, $6\omega_0$, причем если картина рождения новых гармоник вблизи $4\omega_0$ и $6\omega_0$ ясна (спектр на $6\omega_0$ – результат самовоздействия квазимонохроматы на $3\omega_0$, а на $4\omega_0$ – результат перекрестного взаимодействия волн с частотами $\omega_0$ и $3\omega_0$), то в спектр на частоте $2\omega_0$ вносят вклад как самовоздействие исходной волны на частоте $\omega_0$, так и перекрестное взаимодействие волн с частотами $\omega_0$ и $3\omega_0$, причем разделить вклад от различных видов взаимодействий по экспериментально измеренному спектру не представляется возможным.

Данную задачу можно решить при использовании высших спектров. По определению биспектр $S(\omega_2, \omega_3)$ стационарного случайного процесса $P(t)$ связан с третьей кумулянтной функцией фурье-преобразованием

$$S(\omega_2, \omega_3) = \left(\frac{1}{4\pi^2}\right) \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varkappa_3(0, \tau_2, \tau_3) \exp[i(\omega_2\tau_2 + \omega_3\tau_3)]\, d\tau_2\, d\tau_3, \tag{6}$$

а с высшими спектрами $G_{2,1}(\omega)$, $G_{1,2}(\omega)$ – соотношениями

$$G_{1,2}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\omega, \Omega)\, d\Omega, \quad G_{1,2}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\omega - \Omega, \Omega)\, d\Omega. \tag{7}$$

Эволюция биспектров стационарных шумовых волн в нелинейной среде без дисперсии проанализирована в [5], где показано, что в случае однократного взаимодействия биспектр шумовой волны с гауссовой статистикой можно представить в виде

$$\begin{aligned} S(\omega_2, \omega_3, x) = i\beta x[&(\omega_2 + \omega_3) S_0(\omega_2) S_0(\omega_3) - \\ &- \omega_2 S_0(\omega_3) S_0(\omega_2 + \omega_3) - \omega_3 S_0(\omega_2) S_0(\omega_2 + \omega_3)]. \end{aligned} \tag{8}$$

Как следует из (8), на входе в среду биспектр равен нулю, так как равны нулю все высшие кумулянты гауссового процесса. По мере распространения нелинейной волны происходит искажение ее вероятностных распределений и, как следствие, появление биспектра.

На фигуре, *б* приведен срез мнимой части биспектральной плотности для нашего примера. Использование свойств симметрии биспектров стационарных процессов позволяет изображать биспектр в одном октанте плоскости частот $\omega_2$, $\omega_3$ [3]. Из фигуры, *б* видно, что нелинейность среды приводит к появлению биспектральных комплексов на центральных частотах $(\omega_0, \omega_0)$, $(\omega_0, 2\omega_0)$, $(\omega_0, 3\omega_0)$, $(3\omega_0, 3\omega_0)$. Появление биспектра на частотах $\omega_2$, $\omega_3$ свидетельствует о фазовой когерентности тройки волн с частотами $\omega_2$, $\omega_3$, $\omega_2 + \omega_3$, что является следствием их нелинейного взаимодействия. Так, биспектральные комплексы $(\omega_0, \omega_0)$, $(3\omega_0, 3\omega_0)$ образуются за счет самовоздействия исходных монохромат, а комплексы $(\omega_0, 2\omega_0)$ и $(\omega_0, 3\omega_0)$ – за счет перекрестного взаимодействия гармоник, причем первый описывает рождение новых компонент с понижением частоты, т. е. перекачку энергии в частоту $\omega = 2\omega_0$. Таким образом, в отличие от обычной спектральной обработки использование биспектров позволяет разнести вклады различных видов взаимодействий в генерацию волны на частоте $2\omega_0$ на плоскости частот, что приводит к возможности их идентификации.

Использование высших спектров дает возможность ввести функцию $T(\omega, x)$, отвечающую за перекачку энергии по спектру [5]

$$T(\omega, x) = \frac{i\beta\omega}{2} (G_{2,1}(\omega, x) - G_{1,2}(\omega, x)). \tag{9}$$

Положительность $T(\omega, x)$ свидетельствует о подкачке энергии в частоту $\omega$, отрицательность – об утечке энергии из частоты $\omega$. Используя свойства симметрии выс-

ших спектров [3], для $T(\omega, x)$ получаем следующее выражение:

$$T(\omega, x) = -2i\beta\omega\left[\int_0^{\omega/2} S_2(\omega-\Omega, \Omega, x)\,d\Omega - \int_0^{\omega} S_2(\omega, \Omega, x)\,d\Omega - \int_{\omega}^{\infty} S_2(\Omega, \omega, x)\,d\Omega\right]. \quad (10)$$

Для того чтобы определить по экспериментально измеренному биспектру направление потока энергии в данную частоту $\omega$ в некотором сечении $x$, необходимо проинтегрировать биспектр по одной из частот на плоскости $\omega_2$, $\omega_3$. Контуры интегрирования для нахождения вида функции $T(\omega, x)$ на частотах $\omega_3=2\omega_0$ и $\omega_3=3\omega_0$ приведены на фигуре, *б*.

В заключение отметим, что на начальном этапе распространения гауссового шумового сигнала при использовании биспектров возможно решение обратной задачи – восстановление входного спектра по измеренным спектру и биспектру на выходе среды. Так, из (5), (9) следует, что начальный спектр шумового сигнала $S_0(\omega)$ следующим образом выражается через спектр $S(\omega, x)$ и функцию $T(\omega, x)$:

$$S_0(\omega) = S(\omega, x) - xT(\omega, x)/2. \quad (11)$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука. 1975.
2. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. II. М.: Наука, 1967.
3. *Малахов А. Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио. 1978.
4. *Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Якушкин И. Г.* Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии // УФН. 1983. Т. 141. № 2. С. 221–255.
5. *Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Прончатов-Рубцов Н. В.* Эволюция биспектров случайных волн в нелинейных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 6. С. 691–697.



Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского



Поступило в редакцию 2.IX.1986


---


УДК 534.83


# ОБ АКТИВНОМ ГАШЕНИИ ПОЛЯ ДИФРАКЦИИ НА ЩЕЛИ В ЭКРАНЕ


***Иванов В. П.***


В работе [1] решена задача об активном гашении поля дифракции плоской волны на отверстии в экране достаточно далеко от экрана. Представляет практический интерес задача гашения на конечном расстоянии от отверстия в экране. Сформулируем эту задачу. По результатам измерения полного поля, удовлетворяющего уравнению $(\Delta+k^2)U=4if(x, y)$, где $f(x, y)$ – плотность объемной скорости сторонних источников, краевым условиям $\partial U/\partial n|_{L_{jn}}=f_{jn}$, $f_{1n}=f_{2n}=0$, $j=1, 2, 3$, $n=1, \ldots, N_j$; $\partial U/\partial y|_{y=0}=0$ для $|x|\geqslant h$ и условию погашаемости Малюжинца на бесконечности, требуется найти число приемников $N_j$, число излучателей $N_3$ и функции $f_{3n}$ такие, чтобы для поля $U$ вне окружности радиуса $R_4$ при $y>0$ выполнялось соотношение $\sup|U(x, y)|\leqslant\varepsilon$, т. е. нужно выбрать подходящее число приемников, чтобы с необходимой точностью измерить распределение звукового поля, а затем выбрать число, амплитуды и фазы вспомогательных излучателей, чтобы суммарное поле за щелью в экране было мало. Геометрия задачи представлена на фигуре. Будем искать поле $U$ в виде

$$U = \sum_{j=1}^{3}\sum_{n=1}^{N_j}\int_{L_{jn}} \mu_{jn}G(kR_{jn}) + \int_F fG(kR_F) - \int_{-h}^{h} \mu H_0^{(1)}\left[k\left(y^2+(x-\xi)^2\right)^{1/2}\right]d\xi, \quad y<0,$$

$$U = \int_{-h}^{h} \mu H_0^{(1)}\left[k\left(y^2+(x-\xi)^2\right)^{1/2}\right]d\xi, \quad y>0; \quad G(kR) = H_0^{(1)}(kR) + H_0^{(1)}(kR^*),$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля, $\mu_{jn}$ – неизвестные плотности объемной скорости, $R$ и $R^*$ – расстояния от точки наблюдения до точек интегрирования и их зеркального отражения относительно оси $x$.

Расположение приемников на двух окружностях радиуса $R_1$ и $R_2$ позволяет разделить суммарное поле на поле, распространяющееся к отверстию в экране с ампли-