АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIII 1987 Вып. 6

УДК 534.21

О МОЩНОСТИ, ИЗЛУЧАЕМОЙ АКУСТИЧЕСКИМ ИСТОЧНИКОМ, В ОКЕАНИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Журавлев В. А., Кобозев И. К., Кравцов Ю. А.

Полная мощность акустического источника, помещенного в произвольный волновод, выражена через функцию Грина волновода. Вычислена мощность источника (как точечного, так и протяженного) в горизонтально однородном волноводе с произвольным профилем скорости звука в слое и с жидким однородным дном. Для модели Пекириса приведены численные результаты.

Выразим мощность, излучаемую источником, через функцию Грина волновода. Пусть $u(\mathbf{R})$ — звуковое давление в точке $\mathbf{R}=(x, y, z)$ волновода (ось z направим вертикально вниз, на поверхности океана $z=0$), $\rho(\mathbf{R})$ — плотность среды, которую будем считать кусочно-постоянной и равной ρ_1 в водном слое и ρ_2 — в дне. При этом предположении поле $u(\mathbf{R})$, созданное источниками звука $q(\mathbf{R})$, удовлетворяет волновому уравнению [1]

$$\Delta u(\mathbf{R})+k^2(\mathbf{R})u(\mathbf{R})=q(\mathbf{R}), \tag{1}$$

а также условиям непрерывности величин $u(\mathbf{R})$ и $(\mathbf{N}\nabla u)/\rho(\mathbf{R})$ на дне ($\mathbf{N}$ — нормаль к поверхности дна) и граничным условиям на поверхности океана $u|_{z=0}=0$ и условиям излучения на бесконечности.

Поле $u(\mathbf{R})$ в слое можно представить в виде

$$u(\mathbf{R})=\int q(\mathbf{R}')G(\mathbf{R},\mathbf{R}')d^3R', \tag{2}$$

где $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению (1) с $q(\mathbf{R})=\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}')$ и таким же дополнительным условиям, что и само поле $u(\mathbf{R})$.

Плотность потока $p(\mathbf{R})$ акустической мощности, как известно, равна: $p=(1/2)\operatorname{Re}(u\mathbf{v}^*)=-(2\rho\omega)^{-1}\operatorname{Im}(u\nabla u^*)$, где $\mathbf{v}=\nabla u/i\omega\rho$ — колебательная скорость, ω — частота звуковой волны. Используя волновое уравнение (1), нетрудно получить тождество [2]

$$\operatorname{div}[\operatorname{Im}(u\nabla u^*)]=|u|^2\operatorname{Im}(k^2)+\operatorname{Im}(q^*u). \tag{3}$$

Первый член правой части (3) описывает поглощение энергии средой, а второй — энергию, излученную собственно источниками. Интересуясь последней, для полной мощности P, излучаемой источниками, получаем (используя (3), а также теорему Остроградского — Гаусса), следующее выражение:

$$P=-\int\limits_V \operatorname{Im}\left[\frac{q(\mathbf{R})u(\mathbf{R})}{2\rho\omega}\right]d^3R, \tag{4}$$

где V — объем, содержащий все источники. Подставляя в (4) выражение (2) для поля через функцию Грина, находим окончательно

$$P=-\int\limits_V d^3R\operatorname{Im}\left\{\frac{q^*(\mathbf{R})}{2\rho\omega}\int\limits_{V'} q(\mathbf{R}')G(\mathbf{R},\mathbf{R}')d^3R'\right\}. \tag{5}$$

Формула (5) имеет следующую особенность. Если знак мнимой части Im вынести за знак интеграла, то она перестает быть справедливой для точечного источника, поскольку при этом $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ имеет особенность в той же точке, что и $q(\mathbf{R})$, и возникает расходимость. Это выражение, однако, можно использовать для вычисления вклада в полную энергию, об-

условленную дифракционной частью поля [2]. Формула же (5) дает результат и в общем случае.

Подставляя для точечного источника, помещенного в точку $\mathbf{R}_0$, $q(\mathbf{R})=-4\pi A_0\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0)$ в (5), получим

$$P=-P_0\frac{4\pi}{k}\lim_{\mathbf{R}\to\mathbf{R}_0}\{\operatorname{Im}G(\mathbf{R},\mathbf{R}')\},\tag{6}$$

где $P_0=4\pi|A_0|^2/2\rho c_1$ — мощность, излучаемая тем же источником в безграничном однородном пространстве, которую можно получить из той же формулы (5), подставляя туда функцию Грина $G_0=-\exp\{ik|\mathbf{R}-\mathbf{R}_0|\}/4\pi|\mathbf{R}-\mathbf{R}_0|$ безграничного пространства ($k=\omega/c_1$).

Рассмотрим модель плоскослоистого океана с жидким дном постоянной глубины $z=H$. Вещественный показатель преломления $n(z)$ определим равенствами:

$$n(z)=\begin{cases} n_1(z)=c_1/c(z), & 0\leqslant z\leqslant H,\\ n_2=c_1/c_2, & z>H.\end{cases}\tag{7}$$

Здесь $c(z)$ — профиль скорости звука в водном слое, c_1 — некоторое ее значение, скорость звука в дне — c_2. Отношение плотностей грунта ρ_2 и слоя ρ_1 обозначим через $m=\rho_2/\rho_1$.

Функцию Грина в этом случае оказывается удобным представить в виде [3] ($\mathbf{R}=(\mathbf{r},z)$):

$$G(R_1,R_2)=-\frac{i}{4}\sum_{n=1}^{N}\psi_n(z_1)\psi_n(z_2)H_0^{(1)}(h_n|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)-$$
$$-\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{k_2^2}\psi_\nu(z_1)\psi_\nu(z_2)H_0^{(1)}(\sqrt{\nu}\,|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)\,d\nu,\quad \operatorname{Im}\sqrt{\nu}>0,\quad k_2=\omega/c_2.\tag{8}$$

Здесь $\psi_n(z)$, h_n, $\psi_\nu(z)$, ν — вещественные собственные функции и собственные значения соответственно дискретного и непрерывного спектров задачи Штурма — Лиувилля:

$$\frac{d^2\psi_n(z)}{dz^2}+k^2n(z)\psi_n(z)=h_n^2\psi_n(z),\quad n=1,\ldots,N,\quad k_2<h_n<k\max n(z);\tag{9а}$$

$$\frac{d^2\psi_\nu(z)}{dz^2}+k^2n(z)\psi_\nu(z)=\nu\psi_\nu(z),\quad -\infty<\nu\leqslant k_2,\tag{9б}$$

где N — число собственных значений дискретного спектра. Собственные функции (9) $\psi_n(z)$, $\psi_\nu(z)$ удовлетворяют условиям на поверхности $\psi(0)=0$ и на дне $\psi(H-0)=\psi(H+0)$, $(d\psi/dz)|_{z=H-0}=m^{-1}(d\psi/dz)|_{z=H+0}$ и ортогональны в следующем смысле:

$$\langle\psi_n,\psi_m\rangle=\delta_{nm},\quad \langle\psi_n,\psi_\nu\rangle=0,$$
$$\langle\psi_\mu,\psi_\nu\rangle=\delta(\mu-\nu),\tag{10}$$

где $\langle f(z),g(z)\rangle=\int_0^H fg\,dz+m^{-1}\int_H^\infty fg\,dz.$

Рассмотрим линейный источник с распределением (вообще говоря, комплексным) по вертикали, расположенный при $r=0$:

$$q(\mathbf{R})=q(z)\delta(r)/2\pi r.\tag{11}$$

Тот же источник можно задать в виде набора коэффициентов C_n и C_ν, разлагая $q(z)$ по полной системе собственных функций:

$$q(z)=\sum_{n=1}^{N}C_n\psi_n(z)+\int_{-\infty}^{k_2^2}C_\nu\psi_\nu(z)\,d\nu,\tag{12}$$

где

$$C_n=\langle q(z),\ \psi_n(z)\rangle,\quad C_\nu=\langle q(z),\ \psi_\nu(z)\rangle. \tag{13}$$

Подставляя (8), (11) и (12) в основную формулу (5) и учитывая ортогональность собственных функций (10), находим

$$P=\frac{1}{8\rho_1\omega}\left[\sum_{n=1}^{N}|C_n|^2+\int_0^{k_2^2}|C_\nu|^2\,d\nu\right]. \tag{14}$$

Заметим, что согласно полученной формуле (14) поля непрерывного спектра, соответствующие области $-\infty<\nu\leqslant 0$ (так называемые реактивные поля), не дают вклада (в стационарных условиях) в полную мощность, излучаемую источником. Это следует из соотношения $\mathrm{Im}[iH_0^{(1)}(i\sqrt{|\nu|}r)]\equiv\equiv 0$, возникающего в (5) при выводе (14). Вклад остальной части непрерывного спектра ($0\leqslant\nu\leqslant k_2^2$) дается вторым слагаемым, а дискретного — первым в формуле (14).

Выведем также формулу для мощности, излучаемой точечным источником, находящимся в водном слое на глубине z_0. Распределение $q(\mathbf{R})$ в этом случае запишем в виде

$$q(\mathbf{R})=-4\pi A_0\delta(z-z_0)\,\frac{\delta(r)}{2\pi r}, \tag{15}$$

где константа A_0 связана с объемной скоростью источника V_0 равенством [1] $A_0=\omega\rho_1 V_0/4\pi i$.

Подставляя функцию Грина (8) в (6), получим

$$P=P_0\frac{\pi}{k}\left[\sum_{n=1}^{N}\psi_n^2(z_0)+\int_0^{k_2^2}\psi_\nu^2(z_0)\,d\nu\right]. \tag{16}$$

Напомним, что функции ψ_n и ψ_ν вещественны. Выражение (16) следует также и из формулы (14), если учесть разложение δ-функции по полному набору собственных функций волновода, так, что соответствующие точечному источнику (15) коэффициенты $C_n=-4\pi A_0\psi_n(z_0)$, $C_\nu=-4\pi A_0\psi_\nu(z_0)$.

Конкретизируем выражение для нормированных в смысле (10) функций ψ_n и ψ_ν следующим образом. Введем вещественные функции $\varphi_\nu(z)$, являющиеся решениями уравнения (9б) при произвольном ν для водного слоя и удовлетворяющие условиям на поверхности $\varphi_\nu(0)=0$, $-\infty<\nu<<k\max n(z)$. Тогда, учитывая, что в дне показатель преломления постоянен, «продолжим» функцию $\varphi_\nu(z)$ в область $z>H$, полагая

$$\varphi_\nu(z)=A(\nu)\begin{cases}\varphi_\nu(z), & 0\leqslant z\leqslant H,\\ D(\nu)e^{-i\alpha_2(z-H)}+B(\nu)e^{i\alpha_2(z-H)}, & z>H,\end{cases} \tag{17}$$

где в соответствии с условиями сшивки на дне

$$D(\nu)=\frac{1}{2}\left[\varphi_\nu(H)+\frac{im}{\alpha_2}\varphi_\nu'(H)\right], \tag{18}$$

$$B(\nu)=\varphi_\nu(H)-D(\nu).$$

Здесь штрих означает производную по z, вертикальный волновой вектор в дне

$$\alpha_2(\nu)=\begin{cases}+\sqrt{k_2^2-\nu}, & \nu<k_2^2,\\ +i\sqrt{\nu-k_2^2}, & \nu>k_2^2,\end{cases} \tag{19}$$

$A(\nu)$ — нормировочный коэффициент.

Если $\nu<k_2^2$, то функция (17) является собственной функцией непрерывного спектра, при этом из условия нормировки (10) получим [4] ($A_\nu=A(\nu)$)

$$A_\nu=\left[\frac{4\pi\alpha_2}{m}DB\right]^{-1/2}=\left\{\frac{\pi\alpha_2}{m}\left[\varphi_\nu^2(H)+\frac{m^2}{\alpha_2^2}(\varphi_\nu'(H))^2\right]\right\}^{-1/2}. \tag{20}$$

Область $\nu > k_2^2$ соответствует дискретному спектру, собственные значения которого $\nu_n = h_n^2$ находятся из дисперсионного уравнения $D(\nu)=0$ так, чтобы $\psi_n(z)$ (17) не росла экспоненциально при $z \to \infty$, а нормировочный коэффициент $A_n \equiv A(h_n^2)$ равен:

$$A_n = \left[\int_0^H \varphi_n^2(z)\,dz + \frac{i\varphi_n^2(H)}{2m\alpha_{2n}} \right]^{-1/2}. \tag{21}$$

Здесь $\alpha_{2n} = \alpha_2(h_n^2) = i\sqrt{h_n^2 - k_2^2}$.

Подставляя (17), (20), (21) в (16), получим

$$P = P_0 \frac{\pi}{k} \left\{ \sum_{n=1}^{N} A_n^2 \varphi_n^2(z_0) + \int_0^{k_2^2} A_\nu^2 \varphi_\nu^2(z_0)\,dz \right\}. \tag{22}$$

Формула (22) справедлива при произвольном профиле $n(z)$ показателя преломления в слое и удобна тем, что содержит параметры дна в явном виде и, кроме того, в нее входят решения «вертикального» волнового уравнения для слоя, минимально обремененные дополнительными условиями. Каждое слагаемое суммы (22), соответствующей дискретному спектру, равно полному потоку мощности в n-й моде, проходящей через полубесконечную ($0 \leqslant z < \infty$) цилиндрическую поверхность, охватывающую источники. Заметим, что соотношения (20)–(22) при учете равенства $\mathrm{Res}[A^2(\nu)]|_{\nu=\nu_n} = A_n^2$ выявляют для данной модели океана связь потока мощности в отдельной моде дискретного спектра с производной дисперсионного выражения $D(\nu)$ по постоянной распространения $h^2 \equiv \nu$, которая, как показано в работе [5], должна существовать в общем случае, в том числе и для полубесконечных сред. Вклад же в мощность непрерывного спектра дается интегралом в (22).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Полагая в (22) $k_2 \to 0$ и $m \to \infty$, получим формулу для мощности точечного источника в волноводе с абсолютно жестким дном в виде суммы вкладов конечного числа N мод с действительными h_n:

$$P = P_0 \frac{\pi}{k} \sum_{n=1}^{N} \varphi_n^2(z_0) \Big/ \int_0^H \varphi_n^2(z)\,dz. \tag{23}$$

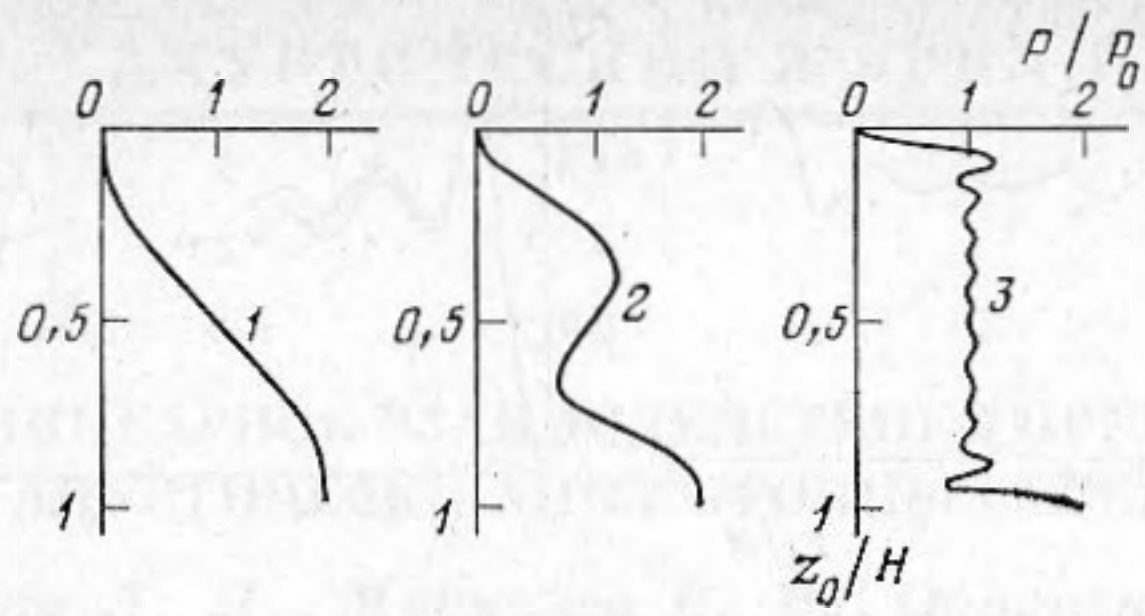
В частном случае однородного волновода, полагая $\varphi_n = \sin \alpha_n z$, $\alpha_n = \sqrt{k^2 - h_n^2} = \frac{\pi}{H}(n - {}^1/_2)$, получим

$$\frac{P}{P_0} = \eta \left[1 - \frac{\sin(2\pi N z_0/H)}{2N \sin(\pi z_0/H)} \right], \tag{24}$$

где $\eta = \pi N/kH$, N=целая часть $[(kH/\pi) + ({}^1/_2)]$ число распространяющихся мод.

Если $N \gg 1$, то $\eta \approx 1$ и зависимость P/P_0 от z_0/H дается выражением в квадратных скобках в правой части (24). На фиг. 1 эта зависимость изображена при $kH/\pi = N = 1$, 2, 10. Отметим, что мощность источника, помещенного вблизи жесткого дна, возрастает вдвое по сравнению со значением ее в безграничном пространстве. Если параметры задачи таковы, что $N \geqslant 1$ (мелкий волновод или низкая частота), то следует учесть фактор η. Интересно отметить, что значение полной мощности вблизи дна «околокритического» волновода (когда $kH/\pi = {}^1/_2$) превышает величину мощности в безграничном пространстве в 4 раза.

В случае волновода Пекериса $c(z) = c_1 = \mathrm{const}$, собственные функции волновода имеют вид $\varphi_n(z) = \sin \alpha_n z$, $\varphi_\nu(z) = \sin \alpha(\nu) z$, где $\alpha_n = \sqrt{k^2 - R_n^2}$,



Фиг. 1. Зависимость мощности, излучаемой точечным источником, от глубины его погружения. Однородный волновод с жестким дном, N – число распространяющихся мод. Кривые *1–3* соответствуют значениям $N=1, 2, 10$

$\alpha(\nu)=\sqrt{k^2-\nu}$. Тогда из (20) – (22) получаем

$$\frac{P}{P_0}=\frac{2\pi}{kH}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin^2\alpha_n z_0}{1-\dfrac{\sin 2\alpha_n H}{2\alpha_n H}+i\dfrac{\sin^2\alpha_n H}{mH\alpha_{2n}}}+ \\ +\frac{m}{k}\int_0^{k_2^2}\frac{\alpha_2\sin^2\alpha z_0\,d\nu}{\alpha_2^2\sin^2\alpha H+\alpha^2 m^2\cos^2\alpha H}. \tag{25}$$

На фиг. 2 приведена зависимость от глубины источника первого слагаемого (25), соответствующего мощности дискретного спектра $P_{\text{диск}}$. При выбранных параметрах волновода видно, что отличие от случая жесткого дна (фиг. 1) состоит в том, что, во-первых, осцилляции происходят около среднего значения, равного $\pi N_0/kH\approx\sqrt{1-n^2}\equiv\gamma$ (N_0 – число мод дискретного спектра), а во-вторых, вблизи дна значение $P_{\text{диск}}$ превышает среднее значение не вдвое, а несколько меньше.

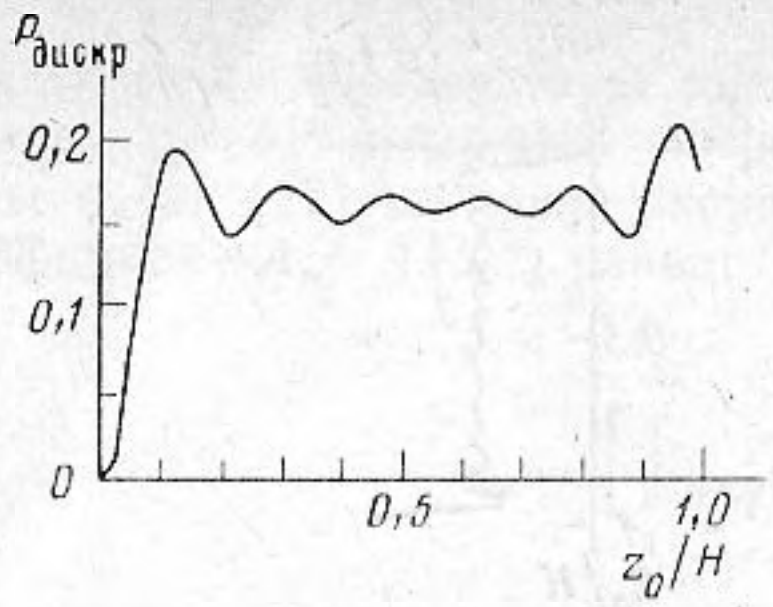
Что касается мощности непрерывного спектра $P_{\text{непр}}$, даваемой вторым членом (25), то, напротив, вид функции $P_{\text{непр}}(z_0)$ существенно зависит от параметров задачи. Рассмотрим ряд примеров.

Пусть $n^2\ll 1/kH$. Этот случай ближе к жесткому дну. Если частота звука не близка к критической, то интеграл (25) равен $\approx(2n^3/3m)(\sin^2 kz_0/\cos^2 kH)\ll 1$. Если же частота близка к частоте зарождения N-й моды, когда $kH=\pi(N-{}^1/_2)\gamma$, то значение интеграла резко возрастает и становится равным $\approx 2nm\sin^2 kz_0$, т. е. в $3m^2/n^2$ раз больше, однако зависимость его от глубины z_0 по-прежнему дается множителем $\sin^2 kz_0$ для любых $0<z_0<H$. Если $kH\gg 1$, $1>n^2\gg 1/kH$, то в этом случае интеграл в (25) можно оценить, усредняя подынтегральное выражение по периоду быстрых осцилляций для разных значений z_0 (вблизи поверхности, в середине и вблизи дна волновода). В результате получаем:

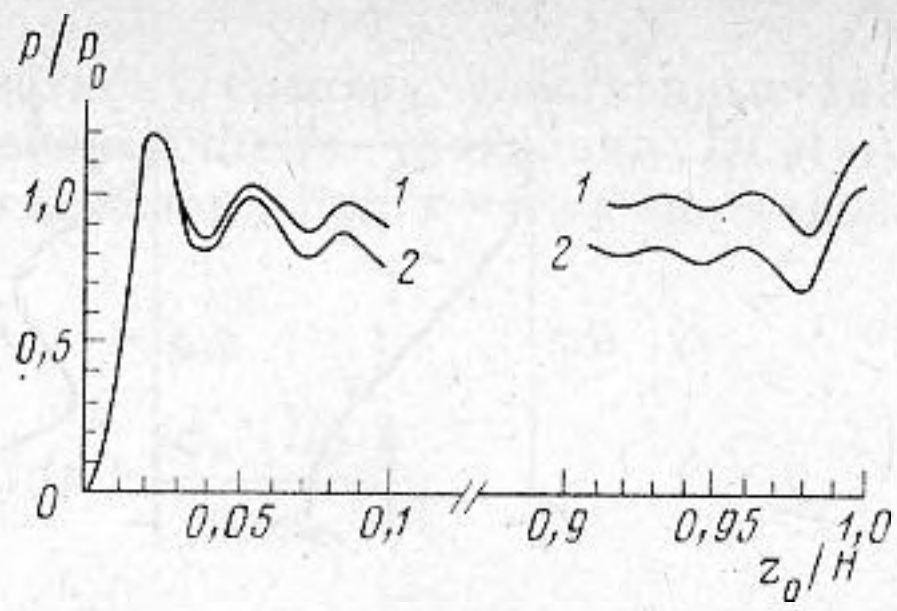
$$\frac{P_{\text{непр}}}{P_0}=\begin{cases}1-\dfrac{\sin 2kz_0}{2kz_0}-\gamma\left(1-\dfrac{\sin 2k\gamma z_0}{2k\gamma z_0}\right), & z_0\ll H,\\ 1-\gamma, & |z_0-H/2|\ll H,\\ 1-\gamma+\gamma\displaystyle\int_1^{1/\gamma}\cos[2\gamma k(H-z_0)x]\frac{m\sqrt{x^2-1}-x}{m\sqrt{x^2-1}+x}\,dx, & H-z_0\ll H.\end{cases} \tag{26}$$

Эта зависимость показана на фиг. 3.

Выражение (26) можно получить также исходя из наглядных физических соображений. Пусть $kH\gg 1$, $kH\gamma\gg 1$, так что число мод дискретного спектра велико. Тогда если источник находится далеко от обеих границ волновода, то мощность непрерывного спектра определяется лучами, выходящими вверх и вниз под углами $|\theta|<\theta_0=\arccos\gamma$ – угла полного внут-



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Мощность дискретного спектра как функция глубины погружения точечного источника. Модель Пекериса, $n^2=0{,}97$, $m=2$, $kH=100$

Фиг. 3. Полная мощность (*1*) и мощность непрерывного спектра (*2*) как функции глубины погружения точечного источника. Параметры задачи те же, что и на фиг. 2

реннего отражения, так что $P_{непр}/P_0=(4\pi)^{-1}\cdot 2\cdot 2\pi\int\limits_{\gamma}^{1} d\cos\theta=1-\gamma$. Если же источник находится вблизи границы с коэффициентом отражения $V(\theta)$, зависящим, вообще говоря, от угла падения θ, то энергия перераспределяется в соответствии с диаграммой направленности, обусловленной наличием мнимого источника. Тогда

$$P_{непр}/P_0=(4\pi)^{-1}2\pi\int\limits_{\gamma}^{1}|1+V(\theta)\exp\{i2kl\cos\theta\}|^2\,d\cos\theta,$$

где l — расстояние до поверхности. Нетрудно убедиться, что это выражение совпадает с (26) вблизи поверхности $z=0$ при подстановке $l=z_0$, $V(\theta)=-1$ и соответственно вблизи дна, если положить $l=H-z_0$, а в качестве $V(\theta)$ взять френелевский коэффициент отражения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З.* Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. 272 с.
3. *Колер В., Папаниколау Дж. К.* Распространение волн в случайно-неоднородном океане // Распространение волн и подводная акустика. М.: Мир, 1980. 229 с.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. С. 83–85.
5. *Тютекин В. В., Бобровницкий Ю. И.* Энергетические соотношения для акустических волноводов // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 4. С. 878–882.

Институт общей физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26.V.1987