УДК 534.222

ПИЛООБРАЗНАЯ ВОЛНА В ПРИБЛИЖЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

Лапидус Ю. Р.

В нелинейной акустике важное значение имеет точное решение уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V\frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}, \tag{1}$$

описывающее один период пилообразной волны:

$$V = -\theta/\pi(1+z/\pi), \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{2}$$

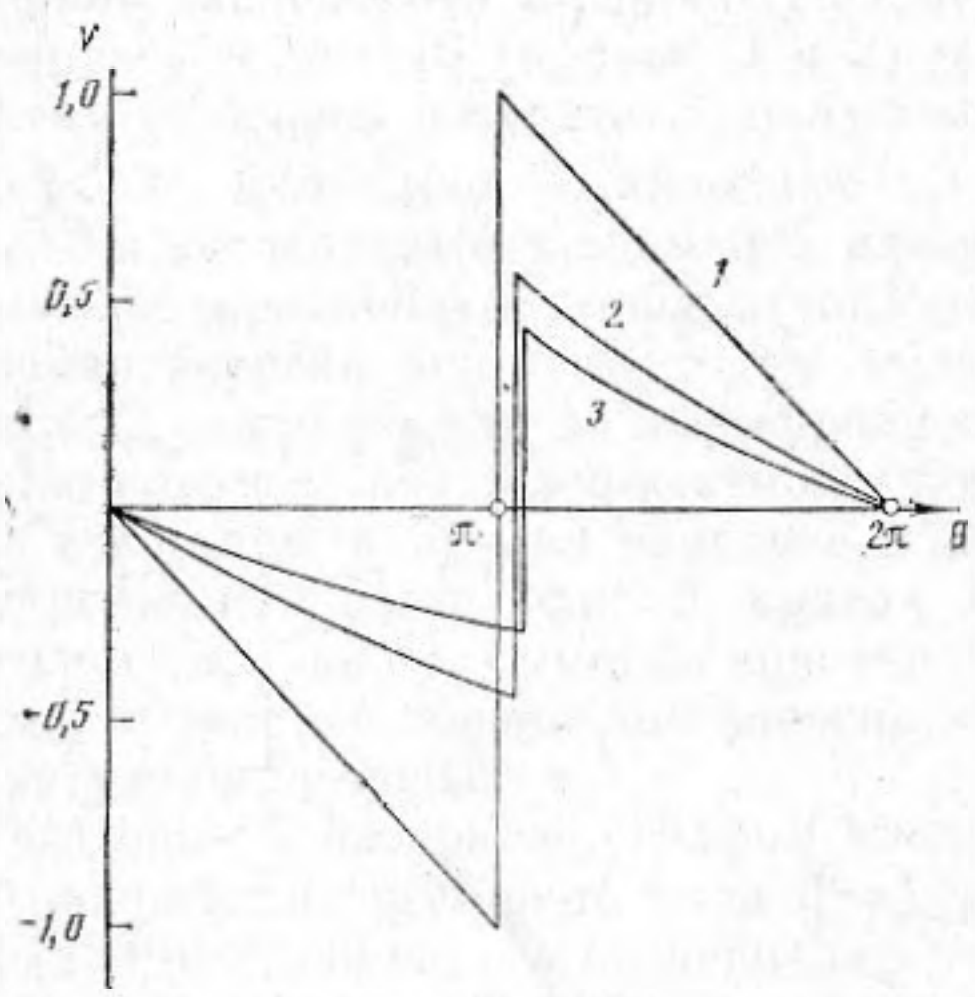
Это решение – простейшее из всех известных. Оно может служить основой для построения более сложных асимптотик, учитывающих конечность ширины фронта (в частности, методом сращиваемых асимптотических разложений [1]). Здесь и ниже использованы обозначения книги [1]: $\theta=\omega(t-x/c_0)$ – безразмерное время в сопровождающей системе координат, $z=x/x_р$ – пройденное волной расстояние в единицах длин образования разрыва $x_р$; $V=U/U_0$. Нормировочные константы U_0, ω имеют смысл исходной амплитуды и частоты волны.

К сожалению, для уравнения Хохлова – Заболотской

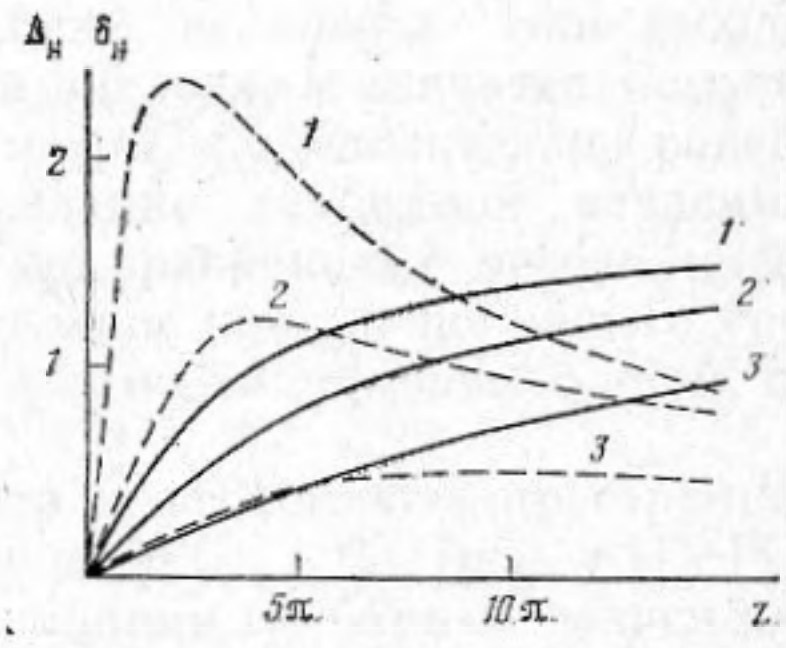
$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial V}{\partial z} - V\frac{\partial V}{\partial \theta}\right] = \frac{N}{4}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial R}\right) \tag{3}$$

(где $N=x_р/x_д$ – отношение длины образования разрыва к дифракционной длине, $R=r/a$ – отношение радиальной координаты к радиусу пучка) базовых решений типа (2) не найдено.

Покажем, что такое решение, обобщающее (2) на случай квазиплоских волн, существует для широких пучков и может быть найдено в приближении нелинейной геометрической акустики (НГА).



Фиг. 1. Волновой профиль, построенный на оси пучка для $N=0{,}2$: *1–3* соответствуют $z=0$, π, 2π



Фиг. 2. Зависимость коэффициентов асимметрии от z. Сплошные кривые – $\delta_н=\delta/N$, штриховые – $\Delta_н=5\Delta/N$; *1–3* соответствуют $R=0, 1, 2$

Различные схемы перехода к НГА предлагались в нескольких известных работах (см., например, [2, 3]). Мы, однако, будем следовать схеме, предложенной О. В. Руденко [4, 5]. По методу [4] нужно совершить в (3) преобразование годографа, рассматривая вместо $V(z, \theta, R)$ как независимую переменную $\theta=S(z, V, R)$. Для малой «добавки» F к фазе нелинейной плоской волны $S=-zV+F$ (появление функции F связано с ограниченностью пучка, ее малость – с использованием приближения НГА) имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial V} + \frac{Nz}{4}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial R}\right) = 0. \tag{4}$$

С формальной точки зрения (4) гораздо проще, чем нелинейное уравнение (3). Однако сложности его анализа связаны с трудностью формулировки граничных условий, отвечающих разумной физической постановке задач (см. [4, 5]). Можно тем не менее найти точное частное решение, которое, как оказалось, обобщает (2).

Пусть на излучателе задана пилообразная волна с амплитудой, плавно убывающей при удалении от оси:

$$V(z=0,\ \theta,\ R)=-\theta/\pi(1+R^2). \tag{5}$$

Переходя от V к переменной F, получим граничное условие

$$F(z=0,\ V,\ R)=-\pi(1+R^2)V. \tag{6}$$

Точное решение уравнения (4) с условием (6) имеет вид

$$F(z,\ V,\ R)=-\pi(1+R^2)V+\pi Nz^2V^2/4. \tag{7}$$

Возвращаясь к исходной переменной V, получим

$$V=-\frac{\theta}{\pi\left(\frac{z}{\pi}+1+R^2\right)}\left[1-\frac{Nz^2}{4\pi}\frac{\theta}{\left(\frac{z}{\pi}+1+R^2\right)^2}\right]. \tag{8}$$

Здесь для простоты мы выписали не точное выражение, а его аппроксимацию с учетом малости члена пропорциональности N^2.

Решение (8) справедливо в пределах периода $-2\pi+\theta_p(z;\ R)\leqslant\theta\leqslant\theta_p(z;\ R)$, где координата разрыва

$$\theta_p=\pi\left(1+\frac{Nz^2}{12\left(\frac{z}{\pi}+1+R^2\right)^2}\right) \tag{9}$$

определяется из закона сохранения количества движения.

Профили волны, построенные при помощи решений (8) и (9), показаны на фиг. 1. Видно, как в процессе распространения волны возникает асимметрия искажения фаз сжатия и разряжения. Положительный полупериод заостряется, его длительность уменьшается, а пиковое значение увеличивается (по сравнению с плоской волной). У отрицательного полупериода, наоборот, длительность увеличивается, а пиковое значение уменьшается.

Используя (8) и (9), можно определить пиковые значения волны в фазе сжатия V_+ и разряжения V_-:

$$V_+=\frac{1}{\left(\frac{z}{\pi}+1+R^2\right)}\left[1+\frac{Nz^2}{6\left(\frac{z}{\pi}+1+R^2\right)^2}\right]. \tag{10}$$

Выражение для V_- получается из (10) после замены $V_+\to-V_-$; $N\to-N$.

Формулы (9) и (10) позволяют получить характеристики асимметрии волны по длительности полупериодов $\delta=2\theta_p-2\pi$ и по пиковому значению $\Delta=V_+-|V_-|$:

$$\delta=\frac{Nz^2}{6\left(\frac{z}{\pi}+1+R^2\right)^2};\qquad \Delta=\frac{Nz^2}{3\left(\frac{z}{\pi}+1+R^2\right)^3}. \tag{11}$$

На фиг. 2 показана зависимость коэффициентов асимметрии (11) от пройденного волной расстояния. Функция δ с ростом z монотонно стремится к значению $N\pi^2/6$, а Δ имеет при $z=2\pi(1+R^2)$ максимум.

Полученные результаты качественно согласуются с описанием явлений нелинейной рефракции, данным в [2].

В заключение отметим, что решения типа (7), (8) могут быть построены для уравнения Хохлова – Заболотской с переменными коэффициентами [3], которое описывает распространение нелинейных волн в неоднородной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильева О. А., Карабутов А. А., Лапшин Е. А., Руденко О. В.* Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд-во МГУ, 1983.
2. *Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.* Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акуст. журн. 1969. Т. 15. № 1. С. 40–47.
3. *Пелиновский Е. И., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин.: Валтус, 1984.
4. *Руденко О. В.* Некоторые точные решения уравнения Хохлова – Заболотской // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 2. С. 311–312.
5. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.

Институт народного хозяйства
им. Г. В. Плеханова

Поступило в редакцию
16.X.1986