АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 1

УДК 534.2

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ПРИДОННЫХ ВОЛНОВОДАХ

Кобозев И. К., Кравцов Ю. А., Огурцов А. В.

В рамках теории «вертикальных мод и горизонтальных лучей» в явной форме найдена поправка к постоянной распространения, вызванная возмущением профиля скорости звука вдоль трассы. Развитая теория позволяет анализировать чувствительность интерференционной картины поля по отношению к возмущениям в водной среде.

Для описания прохождения звуковых волн через горизонтально неоднородный океан широкое распространение получила теория адиабатических (т. е. невзаимодействующих) нормальных волн, которая известна также под названием «теория вертикальных мод и горизонтальных лучей» [1, 2] (обзор литературы см. в [3]). Эта теория имеет высокую концептуальную ценность, но практическое ее использование затруднено отсутствием явных выражений для собственных значений h дифференциального уравнения второго порядка:

$$\partial^2 W/\partial z^2+[k_0^2\varepsilon(z,\ \mathbf{r})-h^2]W=0,\ k_0\simeq\omega/c_0, \tag{1}$$

которому подчиняется функция $W(z,\ \mathbf{r})$, локально характеризующая вертикальную структуру звукового поля $u(x,\ y,\ z)=W(z,\ \mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})}$.

В уравнении (1) $\varepsilon(z,\ \mathbf{r})$ — вертикальный профиль квадрата показателя преломления $h^2(z,\ \mathbf{r})$, медленно зависящий от горизонтальных координат $\mathbf{r}=(x,\ y)$, z — вертикальная координата, h — горизонтальное волновое число, равное $|\nabla\varphi|$, где $\nabla=\partial/\partial\mathbf{r}$. Разумеется, решения уравнения (1) должны подчиняться определенным граничным условиям.

В задачах акустики океана чаще всего принимается, что верхняя граница $z=0$ мягкая, $W(0)=0$, а нижняя $z\neq-H(\mathbf{r})$ — жесткая: $\partial W/\partial z|_{z=-H}=0$.

Строгие решения имеются лишь для небольшого числа профилей $\varepsilon(z)$, и поэтому задача отыскания постоянной распространения h решается сейчас либо численными методами, либо в рамках приближения ВКБ. В последнем случае для h получаются трансцендентные уравнения вида [4]

$$\int\limits_{-H}^{\bar z}\sqrt{k_0^2\varepsilon(z)-h_m^2}\,dz=\pi(m-3/4),\qquad m=1,2,\ldots \tag{2}$$

Это уравнение относится к случаю водно-донных лучей, которые отражаются от идеального дна (при $z=-H(r)$) и поворачивают вниз на уровне $z=\bar z$. Функция $\varepsilon(z)$ предполагается монотонно уменьшающейся к поверхности. Горизонтальные координаты $r=(x,\ y)$ входят в уравнение (2) как параметры. Принимаем здесь модель жесткого дна, хотя обобщение на неидеальное дно в рамках ВКБ подхода сводится просто к добавлению в (2) фазы коэффициента отражения от дна.

Получим удобные квадратурные формулы для поправок к невозмущенному значению постоянной распространения h_m^0, удовлетворяющей уравнению

$$\int\limits_{-H}^{\bar z_0}\sqrt{k_0^2\varepsilon_0(z)-(h_m^0)^2}\,dz=\pi(m-3/4), \tag{3}$$

где $\varepsilon_0(z,\ r)$ — опорный профиль, для которого фазовый интеграл (3) вы-

ражается через известные функции, $\bar{z}_0$ — невозмущенная точка поворота.

Положим

$$\varepsilon(z, r)=\varepsilon_0(z, r)+\nu(z, r), \tag{4}$$

где $\nu(z, r)$ — возмущение, $\nu \ll \varepsilon_0$, и разложим величины $\bar{z}$ и h_m в ряд по степеням ν, ограничиваясь только линейными по ν членами:

$$\bar{z}=\bar{z}_0+\Delta z, \quad h_m=h_m^0+h_m^1. \tag{5}$$

Подставляя (5) в равенство $h_m^2=k_0^2\varepsilon(\bar{z})$, которое служит определением точки поворота, и используя соотношение (4), найдем связь между h_m^1 и Δz:

$$h_m^1=\frac{k_0^2}{2h_m^0}\left[\nu(\bar{z}_0)+\varepsilon'(\bar{z}_0)\Delta z\right], \tag{6}$$

Здесь штрих означает производную по z.

Разлагая далее левую часть равенства (2) в ряд по степеням Δz и используя (3), получим

$$\varepsilon'(\bar{z}_0)\Delta z=\left(\int\limits_{-H}^{\bar{z}_0} dz/2q\right)^{-1}\int\limits_{-H}^{\bar{z}_0}\frac{\nu(z)-\nu(\bar{z}_0)}{q+q_0}dz, \tag{7}$$

где приняты обозначения

$$q=\sqrt{k_0^2\varepsilon(z)-k_0^2\varepsilon(\bar{z}_0)}; \quad q_0=\sqrt{k_0^2\varepsilon_0(z)-(h_m^0)^2}. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (6), окончательно получим

$$h_m^1(\mathbf{r})=\frac{k_0^2}{2h_m^0}\left[\nu(\bar{z}_0)+\left(\int\limits_{-H}^{\bar{z}_0} dz/2q\right)^{-1}\int\limits_{-H}^{\bar{z}_0}\frac{\nu(z)-\nu(\bar{z}_0)}{q+q_0}dz\right]. \tag{9}$$

Отметим, что формула (9) справедлива и в случае, когда, несмотря на малость ν по сравнению с ε_0, их вертикальные градиенты ν' и ε_0' сравнимы по величине между собой, что может иметь место в действительности. В случае же, когда $|\nu'|\ll|\varepsilon_0'|$, выражение (9) упрощается:

$$h_m^1=\frac{k_0^2}{2h_m^0}\left(\int\limits_{-H}^{\bar{z}_0} dz/q_0\right)^{-1}\int\limits_{-H}^{z_0}\nu\, dz/q_0. \tag{10}$$

Для постоянного возмущения ($\nu(z)=\text{const}$) формула (10) дает очевидный результат: $h_m^1=k_0^2\nu/2h_m^0$.

Согласно теории «вертикальных мод и горизонтальных лучей», фаза волны $\varphi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению [2]

$$(\nabla\varphi_m)^2=h_m^2(\mathbf{r}). \tag{11}$$

Если воспользоваться теорией возмущения для эйконала [5], то в первом приближении для возмущения фазы $\varphi_m^1(\mathbf{r})$ получим

$$\varphi_m^1(\mathbf{r})=\int\limits_0^S h_m^1(\mathbf{r}(s))\,ds, \tag{12}$$

где h_m^1 берется из (9) или (10). Интегрирование в (12) ведется вдоль невозмущенного луча, S — длина луча. Если невозмущенная среда однородна по горизонтали, $\varepsilon_0(z, \mathbf{r})\equiv\varepsilon_0(z)$, то интеграл (12) берется вдоль прямой.

Основываясь на соотношениях (12) и (9) (или (10)), можно оценить степень влияния различных возмущений на формирование интерференционной картины поля при распространении нескольких мод. Пусть m — номер одной из распространяющихся мод, имеющих достаточно большую амплитуду. Влияние возмущения будем считать существенным, если разность возмущенных фаз между соседними модами $\varphi_{m+1}^1-\varphi_m^1$ превышает

π (при $\varphi^1_{m+1}-\varphi_m{}^1>\pi$ сложение колебаний u_{m+1} и u_m может смениться вычитанием и наоборот). Для оценки разности $h^1_{m+1}-h_m{}^1$ поступим следующим образом. Считая номер моды m меняющимся непрерывно, можно записать

$$h^1_{m+1}-h^1_m=\frac{\partial h_m{}^1}{\partial m}\Delta m=\frac{\partial h_m{}^1}{\partial m}. \tag{13}$$

Дифференцируя по m равенство (9), получим

$$\frac{\partial h_m{}^1}{\partial m}=-\frac{h_m{}^1}{h_m{}^0}\frac{\partial h_m{}^0}{\partial m}+\frac{k_0{}^2}{2h_m{}^0}\frac{\partial}{\partial m}\Big[\nu(\bar z_0)+\Big(\int\limits_{-H}^{\bar z_0}dz/zq\Big)^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_{-H}^{\bar z_0}\frac{\nu-\nu(\bar z_0)}{q+q_0}dz\Big]. \tag{14}$$

При вычислении производных в (14) учтем соотношения $k_0{}^2\varepsilon_0{}'(\bar z_0)\partial\bar z_0/\partial m=$ $=\partial(h_m{}^0)^2/\partial m$ и $\partial h_m{}^0/\partial m=-2\pi/D_m$, где

$$D_m=2\int\limits_{-H}^{\bar z_0}h_m{}^0\,dz/q_0$$

— длина шага луча. Первое соотношение получается дифференцированием по m равенства $k_0{}^2\varepsilon_0(\bar z_0)=(h_m{}^0)^2$, а второе — дифференцированием равенства (3). Кроме того, воспользуемся тождеством

$$\int\limits_{-H}^{\bar z_0}dz/q=-\frac{1}{\varepsilon'(\bar z_0)}\Big[\frac{2q(-H)}{k_0{}^2}-\int\limits_{-H}^{\bar z_0}\frac{\varepsilon'-\varepsilon'(\bar z_0)}{q}dz\Big], \tag{15}$$

позволяющим избежать расходящихся интегралов при дифференцировании по $\bar z_0$ в формуле (14). В результате получим

$$h^1_{m+1}-h_m{}^1=\frac{2\pi}{D_m}\frac{k_0{}^2}{2(h_m{}^0)^2}\Big\langle\nu+\delta\nu\frac{\gamma}{(1+\sqrt{1+\gamma})^2}\Big\rangle-\frac{2\pi}{D_m}\langle\gamma(z)Q(z)\rangle. \tag{16}$$

Здесь скобки означают усреднение с весом $1/q(z)$:

$$\langle f(z)\rangle=\Big(\int\limits_{-H}^{\bar z_0}dz/q\Big)^{-1}\int\limits_{-H}^{\bar z_0}f\,dz/q.$$

В (16) использованы следующие обозначения:

$$\delta f(z)=f(z)-f(\bar z_0),\quad \gamma(z)=\delta\nu/\delta\varepsilon_0,$$

$$Q(z)=(1+\sqrt{1+\gamma})^{-1}\Big[1+\frac{1+\gamma(\bar z_0)}{\sqrt{1+\gamma}}\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon'(\bar z_0)}\Big(\frac{\langle\varepsilon'\rangle}{\delta\varepsilon(-H)}+\Big\langle\frac{\delta(\varepsilon')}{\delta\varepsilon}\Big\rangle\Big)\Big]. \tag{17}$$

Величина $Q(z)$ слабо зависит от отношения вертикальных градиентов возмущения и невозмущенного профиля $\nu'/\varepsilon_0{}'$ и по порядку величины равна единице. В частном случае, когда $\varepsilon_0(z)$ и $\nu(z)$ линейны по z, $Q=1-$ $-(2/3\gamma)(1+\gamma-\sqrt{1+\gamma})$ и в зависимости от $\gamma=\nu'/\varepsilon_0{}'$ меняется в пределах от 1/3 (при $\gamma=\infty$, что соответствует сильному возмущению) до 1 (при $\gamma=-1$, когда возмущение, действуя в обратную сторону, приводит к исчезновению вертикального градиента скорости звука).

Пусть невозмущенный профиль $\varepsilon_0(z)$ не зависит от горизонтальных координат. Интегрируя (12) вдоль прямой (по которой направим ось x

координат) и используя (16), получим

$$\varphi_{m+1}^{1}-\varphi_m^{1}=2\pi\int_0^L\left(\frac{k_0^2}{2(h_m^0)^2}\left\langle\nu+\delta\nu\frac{\gamma}{(1+\sqrt{1+\gamma})^2}\right\rangle-\langle\gamma Q\rangle\right)\frac{dx}{D_m},\quad(18)$$

где L — расстояние от источника до приемника. В формуле (18) по порядку величины первый член в скобках равен $\nu/\varepsilon_0\ll1$, а второй — $\gamma\approx\nu'/\varepsilon_0'$, поэтому если выполняется соотношение $|\nu'/\nu|\gg|\varepsilon_0'/\varepsilon_0|$, то основной вклад дает второй член:

$$\varphi_{m+1}^{1}-\varphi_m^{1}=-2\pi\int_0^L\langle\gamma Q\rangle dx/D_m.\quad(18')$$

Самостоятельный интерес представляет также формула для поправки к длине цикла луча. В приближении, аналогичном (13),

$$D_m\approx D_{m0}+D_m^1=2\int_{-H}^{\bar z}h_m\,dz/q\approx-\frac{2\pi}{h_{m+1}-h_m},$$

поэтому для поправки D_m^1 имеем

$$D_m^1=\frac{D_{m0}^2}{2\pi}(h_{m+1}^1-h_m^1).$$

Воспользовавшись теперь формулой (16), получим

$$D_m^1=D_{m0}\left\{\frac{k_0^2}{2(h_m^0)^2}\left\langle\nu+\delta\nu\frac{\gamma}{(1+\sqrt{1+\gamma})^2}\right\rangle-\langle\gamma(z)Q(z)\rangle\right\},\quad(19)$$

а в случае, когда $|\nu'/\nu|\gg|\varepsilon_0'/\varepsilon_0|$ (так же, как и при выводе формулы (18′)),

$$D_m^1\approx D_{m0}\langle\gamma(z)Q(z)\rangle.\quad(19')$$

Соотношения (9) и (18) дают возможность, зная возмущение $\nu(z)$, определить влияние тех или иных движений океана (например, внутренних волн, приливных движений) на интерференционную картину акустического поля, что является предметом самостоятельного анализа. Здесь же дадим численную оценку расстояния L, на котором разность фаз соседних мод за счет возмущения достигает значения π, принимая, что отношение градиентов возмущения и невозмущенного профиля $\nu'/\varepsilon_0'=0,1$. Рассмотрим характерный случай, когда $\varepsilon_0(z)$ линейно с градиентом $\varepsilon_0'=-10^{-4}$ м$^{-1}$. Тогда для глубины океана $H=150$ м характерная длина шага луча D_m равна 3 км. Тогда из (18′) получим оценку $L\sim15$ км.

Разумеется, если возмущение вдоль трассы знакопеременно, то результирующее изменение фазы будет значительно меньше, а значение L соответственно увеличится. В этом случае целесообразно использовать статический подход, что мы намереваемся сделать в будущей публикации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат. 1982.
2. *Барридж Р.* Горизонтальные лучи и вертикальные моды/Распространение волн и подводная акустика. М.: Мир. 1980.
3. *Боровиков В. А., Попов А. В.* Распространение волн в плавно перпендикулярных многомодовых волноводах/Прямые и обратные задачи теории дифракции. М.: Изд-во ИРЭ АН СССР. 1979.
4. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука. 1973.
5. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука. 1980.

Институт общей физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
11.IV.1987