АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 1

УДК 532.529

О ВОЛНОВОДНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В ПРИБРЕЖНОЙ ЗОНЕ МЕЛКОГО МОРЯ

Разумовский Н. А.

Теоретически решена задача о волноводном распространении звука в мелком море и о рассеянии звука пологими прибрежными отмелями. Учтено слоистое строение толщи воды. Проанализирован эффект фокусировки звука вблизи каустической линии, идущей вдоль берега.

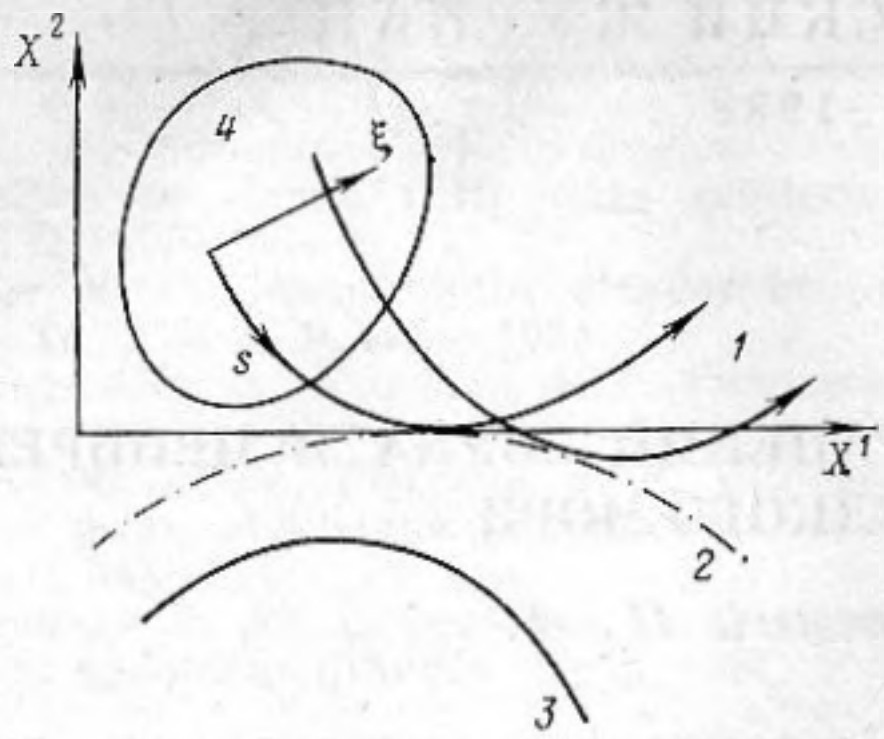
В качестве модели мелкого моря рассматривается акустический волновод, ограниченный свободной поверхностью и жестким дном. В прибрежной зоне море может иметь четко разграниченные по глубине слои воды, различающиеся плотностью и скоростью звука вследствие разной солености и температуры. Допускается, что глубина, а также плотность и скорость звука в пределах каждого слоя медленно изменяются от точки к точке. Границы раздела слоев представляют собой слабо искривленные поверхности, на которых плотность и скорость звука меняются скачком. Волновод возбуждается удаленным источником, так что звуковое поле представляет собой наложение независимо распространяющихся нормальных волн. Считается, что на частоте источника в рассматриваемом волноводе возможно распространение не слишком большого числа нормальных волн. Это значит, что глубина не слишком велика по сравнению с длиной волны. Задача состоит в определении звукового поля нормальной волны слабо нерегулярного слоистого волновода. Ее трудность в том, что, набегая на прибрежные отмели, волна отворачивает от берега, образуя каустическую линию. Примерная картина лучей нормальной волны [1] на горизонтальной плоскости показана на фиг. 1. Для построения звукового поля в окрестности каустик и прочих особенностей поля лучей нормальной волны используется конструкция канонического оператора В. П. Маслова. Аналогичная, но более простая задача о критическом сечении волновода в двумерном пространстве решена в работе [2].

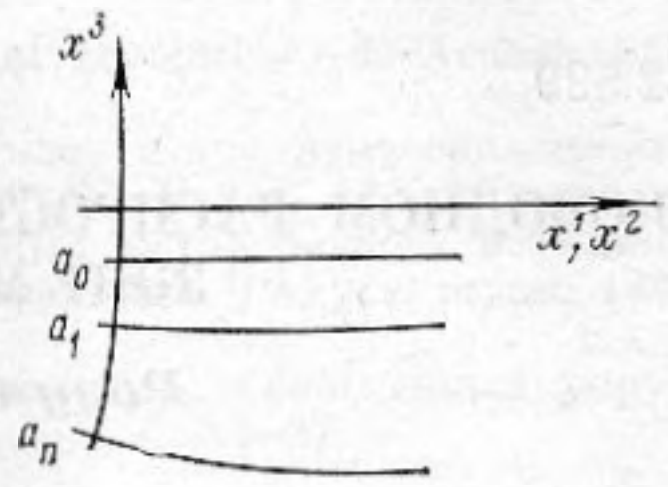
Поверхности раздела слоев задаются уравнениями $x^3=a_j$, $j=1, 2, \ldots, n-1$, в криволинейных координатах x^1, x^2, x^3, (см. фиг. 2). Координаты предполагаются почти прямолинейными, т. е. компоненты метрического тензора в этих координатах выражаются гладкими функциями переменных $X^j=\varepsilon x^j$, $j=1, 2, 3$; ε — малый параметр. Плотность и скорость звука в пределах каждого слоя также представляются функциями X^j. На поверхностях раздела выполнены условия акустического контакта. На границе $x^3=a_0$ требуется равенство нулю давления $p=0$, на границе $x^3=a_n$ — равенство нулю нормальной к поверхностям $x^3=\mathrm{const}$ компоненты скорости смещений $u=0$. Рассматривается распространение нормальной волны, представимой в некоторой области $\tilde{\Omega}_0$ ($X^1\sim1$, $X^2\sim1$, $a_n\leqslant x^3\leqslant a_0$) (см. фиг. 1) в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}=e^{-i\omega t+i\tau(X^1,X^2)/\varepsilon}W, \tag{1}$$

где t — время, ω — частота, эйконал τ не зависит от x^3, а столбец W представляется разложением $W\cong\sum\limits_{l\geqslant0}\varepsilon^l W_l(X^1, X^2, x^3)$.

Цель работы состоит в том, чтобы построить акустическое поле, получающееся в результате распространения волны (1) в произвольной области $X^1\sim1$, $X^2\sim1$, $a_n\leqslant x^3\leqslant a_0$. Для этого используется конструкция канони-





Фиг. 1 Фиг. 2

Фиг. 1. Примерная картина лучей нормальной волны. X^1, X^2 – растянутые «горизонтальные» координаты: *1* – лучи, *2* – каустика, *3* – берег, *4* – область $\widetilde{\Omega}_0$, где задано исходное разложение (1)

Фиг. 2. Схема акустических слоев

ческого оператора В. П. Маслова [3, 4]. Компактной записи результатов, удобной при расчетах, удается добиться за счет матрично-операторного описания [5] полей вида (1).

Для исследования волн в слоях используется матричный оператор $C(\tau, x^3, a_0)$, обобщающий матрицу передачи системы слоев [6]. Оператор C характеризуется тем свойством, что для любого поля колебаний вида (1), удовлетворяющего уравнениям акустики и условиям акустического контакта слоев, имеет место соотношение

$$W=C(\tau, x^3, a_0)(W|_{x^3=a_0}). \tag{2}$$

В работе [5] получено разложение оператора

$$C \simeq \sum_{l\geq 0} \varepsilon^l \sum_{m,n\geq 0}^{m+n\leq l} C_l^{mn} D_1^m D_2^n, \quad D_\gamma = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}, \quad \gamma=1,2.$$

Эйконал τ добавлен к аргументам $C(\tau, x^3, a_0)$, чтобы подчеркнуть зависимость матричного оператора C от функции $\tau(X^1, X^2)$, входящей в представление (1). Полагая $x^3=a_n$ и используя граничные условия при $x^3=a_n$ $x^3=a_0$, можно записать равенство (2) в виде $W|_{x^3=a_n}=\begin{pmatrix}0\\P\end{pmatrix}=C(\tau, a_n, a_0)\begin{pmatrix}U\\0\end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix}U\\0\end{pmatrix}=W|_{x^3=a_0}$. Первая строка этого равенства дает уравнение $C_{11}(\tau, a_n, a_0)U=0$. Подстановка в него разложений C и U и приравнивание членов с одинаковыми степенями ε дает последовательность уравнений. Первое из них – уравнение эйконала $(C_0^{00}(\tau, a_n, a_0))_{11}=H(X^1, X^2, P_1, P_2)|_{P_\gamma=D_\gamma\tau}=0$. Оно совпадает с дисперсионным уравнением $H=0$ регулярного волновода сравнения (P_γ – компоненты волнового вектора) и удовлетворяется за счет выбора эйконала τ. Последующие уравнения удовлетворяются за счет выбора коэффициентов разложения амплитуды U по степеням ε. Разрешимость этих уравнений, а также уравнения эйконала гарантирована лишь в области $\widetilde{\Omega}_0$, где семейство лучей, связанных с эйконалом τ, не имеет особенностей. Лучи представляют собой проекции на плоскость X^1, X^2 бихарактеристик, получаемых в четырехмерном фазовом пространстве $R^4_{X^1,X^2,P_1,P_2}$ интегрированием системы уравнений Гамильтона:

$$\frac{dx^\gamma}{ds}=\frac{\partial H}{\partial P_\gamma}, \quad \frac{dP_\gamma}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial x^\gamma}, \quad \gamma=1,2. \tag{3}$$

Начальные условия при $s=0$ для этой системы даются равенствами

$$X^\gamma=X^\gamma(0,\xi),\quad P_\gamma=(D_\gamma\tau)|_{x^\gamma=x^\gamma(0,\xi)},\quad \gamma=1,2.$$

Линия $X^\gamma=X^\gamma(0,\xi)$ на плоскости X^1, X^2, параметризованная переменной ξ, произвольна с точностью до требований: линия лежит в области $\tilde{\Omega}_0$, где задано представление акустического поля (1). Градиент $\nabla\tau$ нигде не направлен по касательной к этой линии. Задача Коши для системы уравнений (3) однозначно разрешима, причем бихарактеристики, отвечающие разным значениям ξ, не пересекаются. Дополнительно потребуем, чтобы любая бихарактеристика уходила на бесконечность при $s\to\infty$ (условие неловушечности). Бихарактеристики выстилают гладкое двумерное многообразие Λ, на котором s и ξ могут быть выбраны в качестве координат. При условии, что линия $X^\gamma(0,\xi)$ не замкнута, многообразие Λ представляет собой односвязное лагранжево многообразие, на котором интеграл $\int\sum_{\gamma=1}^{2}P_\gamma\,dX^\gamma$ не зависит от пути интегрирования. При этом на Λ можно ввести гладкую функцию

$$S(s,\xi)=\tau(X^1(0,\xi),X^2(0,\xi))+\int\limits_{(0,\xi)}^{(s,\xi)}\sum_{\gamma=1}^{2}P_\gamma\,dX^\gamma.$$

Для точек многообразия Λ, проекции которых на плоскость X^1, X^2 попадают в область $\tilde{\Omega}_0$, имеет место соотношение $\tau(X^1(s,\xi),X^2(s,\xi))=S(s,\xi)$, где $X^\gamma(s,\xi)$ — координаты проекции.

Известно [3], что лагранжево многообразие может быть покрыто такой системой карт Ω_j с разбиением единицы $\{e_j\}$, $e_j\in C_0^\infty(\Omega_j)$, $\sum\limits_j e_j\equiv1$, что каждая из карт Ω_j диффеоморфно проектируется по крайней мере на одну из лагранжевых координатных плоскостей X^1, X^2 или X^1, P_2, или X^2, P_1, или P_1, P_2. На каждой карте выбираются локальные координаты, равные координатам проекции точки Λ на соответствующую лагранжеву плоскость Эти координаты будут обозначаться X^α, P_β, где мультииндексы α и β принимают значения $\alpha=1,2$; $\beta=\varnothing$ или $\alpha=1$; $\beta=2$, или $\alpha=2$; $\beta=1$, или $\alpha=\varnothing$; $\beta=1,2$ сообразно тому, на которую из лагранжевых координатных плоскостей рассматриваемая карта диффеоморфно проектируется. Заметим, что $\alpha\cup\beta=1,2$.

Поля давления $p(x^1,x^2,x^3)$ и нормальной к поверхностям $x^3=\mathrm{const}$ компоненты скорости смещений $u(x^1,x^2,x^3)$ ищутся в виде

$$\begin{pmatrix}u\\p\end{pmatrix}=\sum_j c_j\left(\frac{i}{2\pi\varepsilon}\right)^{|\beta|/2}\int\limits_{R^{|\beta|}_{P_\beta}}e^{i\tau_j/\varepsilon}C(\tau_j,x^3,a_0)\left[J_j^{-1/2}e_j\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]dP_\beta. \qquad (4)$$

В этой формуле c_j — постоянные, выбор которых описан в § 4 гл. 5 книги [4] и в [3]. При построении матричных операторов $C(\tau_j,x^3,a_0)$ в качестве эйконала берется

$$\tau_j(X^\alpha,X^\beta,P_\beta)=S(s(X^\alpha,P_\beta)\xi(X^\alpha,P_\beta))-\sum_\beta P_\beta X^\beta(X^\alpha,P_\beta)+\sum_\beta P_\beta X^\beta,$$

где X^α, P_β — локальные координаты в карте Ω_j, $s(X^\alpha,P_\beta)$ и $\xi(X^\alpha,P_\beta)$ — глобальные координаты точки многообразия Λ, имеющей локальные координаты X_α, P_β. Координаты той же точки в пространстве $R^4_{X^1,X^2,P_1,P_2}$ обозначены $X^\beta(X^\alpha,P_\beta)$, $P_\alpha(X^\alpha,P_\beta)$. Якобиан $J_j(X^\alpha,P_\beta)=\left|\dfrac{D(X^\alpha,P_\beta)}{D(s,\xi)}\right|$ не равен нулю в карте Ω_j, а функция $\varphi\in C^\infty(\Lambda)$. Вследствие формулы (2) поле колебаний (4) удовлетворяет граничному условию при $x^3=a_n$, условиям контакта слоев и формально удовлетворяет уравнениям акустики в каждом слое. Граничное условие при $x^3=a_n$ может быть удовлетворено за счет вы-

бора функции $\varphi \in C^\infty(\Lambda)$. Это условие можно записать в виде

$$\sum_j c_j \left(\frac{i}{2\pi\varepsilon}\right)^{|\beta|/2} \int\limits_{R^{|\beta|}_{P_\beta}} e^{i\tau_j/\varepsilon} C_{11}(\tau_j, a_n, a_0)\,[J_j^{-1/2} e_j \varphi]\, dP_\beta = 0. \tag{5}$$

Интегралы, входящие в это уравнение, имеют быстроосциллирующие подынтегральные выражения. Основные вклады дают окрестности стационарных точек, где X^α, X^β и P_β связаны уравнением $\partial\tau_j/\partial P_\beta = X^\beta - X^\beta(X^\alpha, P_\beta) = 0$. Для решения уравнения (5) следует исключить неэкспоненциальную зависимость подынтегральных выражений от переменных X^β, приведя интегралы к виду интегралов Фурье. Величины J_j, e_j и φ выражаются в локальных координатах X^α, P_β, а коэффициенты матричного оператора $C_{11}(\tau_j, a_n, a_0)$ могут быть представлены рядами Тейлора по степеням $X^\beta - X^\beta(X^\alpha, P_\beta)$. Интегрирование по частям в каждом слагаемом позволяет избавиться от степеней $X^\beta - X^\beta(X^\alpha, P_\beta) = \partial\tau_j/\partial P_\beta$ и привести уравнение (5) к виду

$$\sum_j c_j \left(\frac{i}{2\pi\varepsilon}\right)^{|\beta|/2} \int\limits_{R^{|\beta|}_{P_\beta}} e^{i\tau_j/\varepsilon} \left\{\sum_{l\geqslant 0} \varepsilon^l G_l\right\} [J_j^{-1/2} e_j \varphi]\, dP_\beta = 0, \tag{6}$$

где G_l — дифференциальные операторы по переменным X^α, P_β. Слагаемое с нулевой степенью ε в фигурных скобках равно $G_0 = (C_0^{00})_{11}|_\Lambda = H|_\Lambda = 0$. Оно тождественно равно нулю, поскольку в начале траектории $(C_0^{00})_{11} = 0$ из уравнения эйконала, а $H|_\Lambda$ не зависит от s согласно уравнениям Гамильтона. Коэффициент при старшей, первой степени ε в фигурных скобках уравнения (6) равен

$$G_1 = (C_1^{00})_{11}|_\Lambda + (C_1^{10})_{11}|_\Lambda D_1 + (C_1^{01})_{11}|_\Lambda D_2 + i \sum_{\beta_1} \frac{\partial}{\partial P_{\beta_1}} \left(\frac{\partial (C_0^{00})_{11}}{\partial X^{\beta_1}}\bigg|_\Lambda\right) +$$
$$+ i \sum_{\beta_1} \left(\frac{\partial (C_0^{00})_{11}}{\partial x^{\beta_1}}\bigg|_\Lambda\right) \frac{\partial}{\partial P_{\beta_1}} - \frac{i}{2} \sum_{\beta_1, \beta_2} \frac{\partial X^{\beta_1}(\ldots)}{\partial P_{\beta_2}} \left(\frac{\partial^2 (C_0^{00})_{11}}{\partial X^{\beta_1} \partial X^{\beta_2}}\bigg|_\Lambda\right).$$

Вычисления показывают, что

$$G_1 = J_j^{-1/2} \left(F - \frac{id}{ds}\right) J_j^{1/2},$$

где $\dfrac{d}{ds} = \sum\limits_\alpha \dfrac{dX^\alpha}{\partial s} \dfrac{\partial}{\partial X^\alpha} + \sum\limits_\beta \dfrac{dP_\beta}{ds} \dfrac{\partial}{\partial P_\beta}$ — производная вдоль бихарактеристики, а функция

$$F = (C_1^{00})_{11}|_\Lambda + \frac{i}{2} \sum_{\gamma=1}^{2} \frac{\partial^2 H}{\partial P_\gamma \partial X^\gamma}\bigg|_\Lambda + \frac{i}{2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{\partial^2 H}{\partial P_{\alpha_1} \partial P_{\alpha_2}}\bigg|_\Lambda \frac{\partial P_{\alpha_2}(\ldots)}{\partial X^{\alpha_1}}.$$

Можно показать, что $F \in C^\infty(\Lambda)$ и не зависит от карты Ω_j. При этом в главном члене уравнение (6) приводится к виду

$$K_\Lambda \left[\left(F - i\frac{d}{ds}\right)\varphi\right] = 0, \tag{7}$$

где K_Λ — канонический оператор [3, 4]. Решение уравнения (7) дается выражением

$$\varphi(s, \xi) = \varphi(0, \xi) \exp\left(i \int\limits_0^s F(s', \xi)\, ds'\right). \tag{8}$$

Начальное значение $\varphi(0, \xi)$ находится из сравнения разложения (1), справедливого в карте Ω_0, с общим представлением (4). В карте Ω_0, проектирующейся на плоскость X^1, X^2, представление (4) дает $u(x^1, x^2, a_0) = e^{iS/\varepsilon} J_0^{-1/2} \varphi$, откуда

$$\varphi(0, \xi) = J_0^{1/2} U. \tag{9}$$

Правая часть этого равенства также вычисляется в точке $(0, \xi)$ кривой $s=0$.

Формулы (4), (8), (9) дают глобальное описание звукового поля нормальной волны слабо нерегулярного слоистого волновода. Эти формулы в принципе позволяют вычислять звуковое поле, отвечающее конкретной гидрологической ситуации. Кроме того, формула (4) позволяет качественно проанализировать эффект фокусировки звука вблизи каустической линии, идущей вдоль берега (см. фиг. 1). Пусть координата X^1 идет вдоль каустики, а X^2 перпендикулярна ей. Локальными координатами в окрестности каустики будут X^1, P_2. Бихарактеристики — решения уравнений (3) качественно описываются соотношениями $P_1(X^1, P_2) \simeq f_1(X^1) + \ldots$, $X^2(X^1, P_2) \simeq \simeq f_2(X^1)(P_2)^2 + \ldots$, где f_1, f_2 — не равные нулю функции; многоточиями заменены члены, малые вблизи каустики. Функция $S(X^1, P_2)$, получаемая интегрированием по бихарактеристикам, имеет вид

$$S(X^1, P_2) = \int P_1\, dX^1 + P_2\, dX^2 \simeq \int f_1\, dX^1 + \frac{2}{3} f_2 (P_2)^3 + \ldots$$

Представление (4) поля колебаний сводится при этом к интегралу

$$\int (1+\ldots) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \left[\int f_1\, dX^1 + P_2 X^2 - \frac{1}{3} f_2 (P_2)^3 + \ldots \right] \right\} dP_2,$$

выражающемуся через функцию Эйри от аргумента $X^2 \varepsilon^{-2/3} = x^2 \varepsilon^{1/3}$. Это значит, что вблизи каустики происходит концентрация звукового поля в полосе шириной $\lambda \varepsilon^{-1/3}$, где λ — длина нормальной волны (порядка глубины моря вблизи каустики), а ε — малый параметр, характеризующий нерегулярность волновода и поля колебаний. Для оценок можно принять ε равным тангенсу угла наклона дна. При удалении от каустики в сторону берега амплитуда звукового поля быстро убывает. При удалении в сторону моря амплитуда имеет чередующиеся максимумы, отстоящие друг от друга на расстояния порядка $\lambda \varepsilon^{-1/3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабич В. М., Чихачев Б. А.* Распространение волн Лява и Рэлея в слабо неоднородной слоистой среде // Вестн. ЛГУ. 1975. № 1. С. 32–38.
2. *Молотков И. А.* Поведение волноводных мод в окрестности критического сечения // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1974. Т. 42. С. 181–188.
3. *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 296 с.
4. *Вайнберг Б. Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. 296 с.
5. *Молотков Л. А., Разумовский Н. А.* О матричном методе для слабо неоднородных слоистых акустических сред // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1983. № 128. С. 105–115.
6. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.

Научно-производственное объединение
Всесоюзный научно-исследовательский
институт метрологии им. Д. И. Менделеева

Поступила в редакцию
3.II.1987