АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 1

УДК 534

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ТРЕХОСНОМ ЭЛЛИПСОИДЕ

Федорюк М. В.

Получены точные решения задач дифракции плоской волны и поля точечного источника на трехосном эллипсоиде с идеальными граничными условиями в виде рядов по волновым функциям Ламе.

В трехмерном пространстве имеется ровно 11 ортогональных криволинейных систем координат, в которых уравнение Гельмгольца

$$(\Delta+k^2)u=0 \tag{1}$$

допускает разделение переменных [1]. Эллипсоидальные координаты z_1, z_2, z_3 определяются из уравнения

$$\frac{x_1^2}{z-a_1}+\frac{x_2^2}{z-a_2}+\frac{x_3^2}{z-a_3}=1, \tag{2}$$

где x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты точки $\mathbf{r}$, числа a_j фиксированы, $a_1<a_2<a_3$. Если точка $\mathbf{r}$ не лежит на одной из исключительных поверхностей (они называются также фокальными), то уравнение (2) имеет ровно три вещественных корня, причем $a_1<z_1<a_2<z_2<a_3<z_3$. Поверхности $z_1=z_1^0$ — двуполостные гиперболоиды, $z_2=z_2^0$ однополостные гиперболоиды, $z_3=z_3^0$ — трехосные эллипсоиды. Эти поверхности образуют конфокальное семейство. Эллипсоидальная система координат является «высшей» в том смысле, что остальные 10 получаются из нее с помощью различных предельных переходов по параметрам [1, 2]. Далее [1]

$$x_j^2=\frac{|(z_j-a_1)(z_j-a_2)(z_j-a_3)|}{|f'(a_j)|},\quad h_j^2=\frac{(z_j-z_{j+1})(z_j-z_{j-1})}{4f(z_j)},$$
$$f(z)=(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3), \tag{3}$$

где h_j — коэффициенты Ламе. Оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta=4[(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)]^{-1}[(z_3-z_2)L_1+(z_1-z_3)L_2+(z_2-z_1)L_3], \tag{4}$$
$$L_j=\sqrt{f(z_j)}\frac{\partial}{\partial z_j}\sqrt{f(z_j)}\frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Уравнение (1) имеет решения вида

$$u(r)=w_1(z_1)w_2(z_2)w_3(z_3). \tag{5}$$

Функции w_j удовлетворяют волновому уравнению Ламе

$$\left[\sqrt{f(z)}\frac{d}{dz}\sqrt{f(z)}\frac{d}{dz}+\frac{1}{4}q\right]w=0,$$
$$q=h-lz+k^2z^2, \tag{6}$$

но каждая — в своей области определения: w_1 — при $a_1<z<a_2$, w_2 — при $a_2<z<a_3$, w_3 — при $z>a_3$. Здесь h, l — константы разделения. Кроме того, функции w_1, w_2 удовлетворяют некоторым однородным граничным условиям в точках a_1, a_2, a_3, которые будут сформулированы ниже. Функции w_1, w_2 называются угловыми волновыми функциями Ламе, функция w_3 — радиальной волновой функцией Ламе.

Волновые функции Ламе мало изучены, для них нет даже общепринятых обозначений [3]. Однако в последнее время интерес к функциям Ламе

заметно возрос. Появился ряд работ, в которых исследуются общие свойства функций Ламе, их асимптотики, строятся численные алгоритмы и вычисляются некоторые функции Ламе [4–6]. Отметим также раннюю работу [7], в которой в простейших случаях была вычислена асимптотика функции Ламе и в связи с задачей о собственных колебаниях трехосного эллипсоида.

Поскольку известная информация о волновых функциях Ламе носит достаточно разрозненный характер, а сами эти функции сравнительно мало известны, по сравнению с другими специальными функциями, приведем определение и основные свойства функций Ламе. Из аналитической теории дифференциальных уравнений [8, 9] следует, что (6) имеет на римановой сфере четыре особые точки: a_1, a_2, a_3 — регулярные, $z=\infty$ — иррегулярная. В окрестности точки a_j (6) имеет фундаментальную систему решений вида $\{w_0(z, a_j), w_1(z, a_j)=\sqrt{z-a_j}\psi\}$, где функции w_0, ψ аналитичны и отличны от нуля в точке $z=a_j$. Условимся считать, что решение (6) удовлетворяет в точке a_j условию типа 0 (соответственно типа 1), если оно пропорционально решению w_0 (соответственно w_1). Формально имеется 16 вариантов граничных условий для функций Ламе, но в действительности возможна только половина из них, по следующей причине. Пусть u есть решение (1) в окрестности начала координат. Имеется широко распространенная форма записи [10, 11]:

$$\{1;\ x_1,\ x_2,\ x_3;\ x_1x_2,\ x_2x_3,\ x_3x_1;\ x_2x_3\}v, \tag{7}$$

которая означает, что u есть сумма решений вида v_0, x_1v_1, x_2v_2, x_3v_3 и т. д., где v_j — аналитические функции от x_1^2, x_2^2, x_3^2. Поэтому из (3), (5), (7) следует, что функция Ламе w_1, w_2 удовлетворяют одному и тому же граничному условию в точке a_2, так что имеется восемь типов граничных условий (i_1, i_2, i_3). Числа i_j равны 0 или 1, функция w_j удовлетворяет условию типа i_k в точке a_k. Фиксируем граничные условия. Пара чисел (h, l) называется точкой спектра волнового уравнения Ламе, если существует пара функций $w_1\neq0$, $w_2\neq0$, которые удовлетворяют уравнению (6) и граничным условиям. Множество всех таких пар (h, l) называется спектром уравнения (6); обозначим его Σ. Ясно, что имеется восемь типов волновых функций Ламе и что Σ состоит из восьми компонент. Подчеркнем, что функция Ламе — решения двухпараметрической задачи на собственные значения. Такие специальные функции, как функции Бесселя, Лежандра, Матье, Вебера, гипергеометрическая и др.— частные случаи функции Ламе, так как уравнения для них могут быть получены из уравнения (6) с помощью различных предельных переходов по параметрам.

Спектр Σ вещественен и для каждой компоненты простой. Точка $(h, l)\notin\Sigma$, если выполнено одно из условий: $q(z)\leqslant0$ при $a_1\leqslant z\leqslant a_2$, $q(z)\geqslant0$ при $a_2\leqslant z\leqslant a_3$. Если тип функции Ламе фиксирован, то для каждой пары натуральных чисел n_1, n_2 существует единственная точка $(h, l)\in\Sigma$ такая, что функция Ламе w_1 имеет n_1 нулей в интервале $a_1<z<a_2$, а функция Ламе w_2 имеет ровно n_2 нулей в интервале $a_2<z<a_3$. Если u есть решение (1), имеющее вид (5), то функция $\Psi(z_1, z_2)=w_1(z_1)w_2(z_2)$ называется поверхностной функцией Ламе. Из (4), (6) следует, что Ψ удовлетворяет системе уравнений

$$\left[L_1-L_2+\frac{1}{4}(z_1-z_2)\left(k^2(z_1+z_2)-l\right)\right]\Psi=0,$$

$$\left[Z_1L_2-z_2L_1+\frac{1}{4}(z_1-z_2)\left(h-k^2z_1z_2\right)\right]\Psi=0.$$

Пусть Π — прямоугольник $a_1<z_1<a_2$, $a_2<z_2<a_3$ и Ψ_1, Ψ_2 — поверхностные функции Ламе, отвечающие различным точкам спектра. Тогда они ортогональны с весом:

$$\iint\limits_{\Pi}\rho\Psi_1\Psi_2\,dz_1\,dz_2=0,\qquad \rho=\frac{(z_2-z_1)}{\sqrt{-f(z_1)f(z_2)}}. \tag{8}$$

Радиальная волновая функция Ламе либо удовлетворяет условию типа i_3 в точке a_3 (такие функции используются для внутренних задач), либо условию на бесконечности (такие функции используются для внешних задач). При любом фиксированном $k\neq 0$ таком, что $\operatorname{Im} k\geqslant 0$, уравнение (6) имеет решение:

$$w_3(z)=z^{-1/2}\exp\{ik\sqrt{z}\}[1+O(z^{-1/2})],\ z\to+\infty. \tag{9}$$

Если u — решение уравнения (1), вида (5), а w_3 имеет вид (9), то u удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда, если $k>0$, и условию погашаемости, если $\operatorname{Im} k>0$.

Пусть S — эллипсоид $z_3=z_3^0>a_3$, $\bar{D}$ — его внутренность, а D — внешность, $k>0$. Рассмотрим задачу дифракции на теле D с идеальной границей поля точечного монопольного источника, расположенного в точке $r'\in D$. Полное поле $u(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta+k^2)u=\delta(r-r') \tag{10}$$

в области D и одному из граничных условий на S:

$$\text{а) } u(\mathbf{r})|_S=0;\ \text{б) } \partial u(\mathbf{r})/\partial n|_S=0, \tag{11}$$

где $\partial/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к S, и условию излучения. Возьмем все поверхностные функции Ламе $\{\Psi\}$, $n=1, 2, \ldots$, занумерованные в произвольном порядке и нормированные условием

$$\iint\limits_{\Pi} \rho\Psi_n^2\,dz_1\,dz_2=1. \tag{12}$$

Тогда $\{\Psi_n\}$ — ортонормированный базис в пространстве $L_\rho^2(\Pi)$ функций с конечным интегралом $\iint\limits_{\Pi}\rho|\Psi|^2\,dz_1\,dz_2$, вес $\rho(z_1, z_2)$ указан в формуле (8). Разложим функцию Грина свободного пространства $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\frac{1}{L/\pi}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}\exp\{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\}$ в ряд по волновым функциям Ламе:

$$G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\sum_n \Psi_n(z_1,z_2)\Psi_n(z_1',z_2')g_n(z_3,z_3'). \tag{13}$$

Применим тот же метод, который используется при разложении G_0 в ряд по сфероидальным функциям [12]. Имеем

$$\delta(r-r')=(h_1h_2h_3)^{-1}\delta(z_1-z_1')\delta(z_2-z_2')\delta(z_3-z_3') \tag{14}$$

(это разложение справедливо в любой ортогональной криволинейной системе координат) и

$$\rho(z_1,z_2)\sum_n \Psi_n(z_1,z_2)\Psi_n(z_1',z_2)=\delta(z_1-z_1')\delta(z_2-z_2'), \tag{15}$$

так как $\{\Psi_n\}$ — ортонормированный базис в $L_\rho^2(\Pi)$. Подставляя ряд (13) в уравнение (10) и учитывая тождества (4), (6), (14), (15), получаем

$$4(z_2-z_1)[(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)]^{-1}\sum_n \Psi_n(z_1,z_2)\Psi_n(z_1',z_2')\times$$

$$\times\left[L_3+\frac{1}{4}q(z_3)\right]g_n=(h_1h_2h_3)^{-1}\delta(z_1-z_2')\delta(z_2-z_2')\delta(z_3-z_3');$$

оператор L_3 указан в формуле (4). Выберем функции g_n так, чтобы

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dz_3}\sqrt{f(z_3)}\frac{d}{dz_3}+\frac{q(z_3)}{4\sqrt{f(z_3)}}\right]g_n=\delta(z_3-z_3').$$

Таким образом, g_n есть функция Грина обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Укажем граничные условия в точках $z=a_3$ и $z=\infty$. Пусть Ψ_n — поверхностная функция Ламе, отвечающая граничным условиям типа (i_1, i_2, i_3). Тогда g_n удовлетворяет условию типа i_3 в точке $z=a_3$ и условию излучения на бесконечности. Пусть $w_{3n}^{(1)}(z_3)$, $w_{3n}^{(3)}(z_3)$ — радиальные функции Ламе такие, что $w_{3n}^{(1)}$ удовлетворяет условию типа i_3 в точке a_3, а $w_{3n}^{(3)}$ имеет вид (9). Верхний индекс у этих функций выбран так же, как и для сфероидальных функций (см. [12]). Пусть $W_n(z_3)$ — вронскиан решений $w_{3n}^{(1)}, w_{3n}^{(3)}$, тогда $\sqrt{f(z_3)}$, $W_n(z_3)=w_n=\text{const}$. Используя известную формулу для функции Грина [13], получаем коэффициенты разложения (13):

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')=2\sum_n w_n^{-1}\Psi_n(z_1, z_2)\Psi_n(z_1', z_2')\begin{cases} w_{3n}^{(1)}(z_3)\,w_{3n}^{(3)}(z_3'), & z_3<z_3', \\ w_{3n}^{(1)}(z_3')\,w_{3n}^{(3)}(z_3), & z_3>z_3'. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь использован также тот факт, что $z_3 \sim r^2$ при $r\to\infty$.

Рассеянное поле $u_s(\mathbf{r})$ будем искать в виде ряда

$$u_s(\mathbf{r})=2\sum_n u_n w_n^{-1}\Psi_n(z_1', z_2')\Psi_n(z_1, z_2)\,w_{3n}^{(3)}(z_3). \tag{17}$$

Из разложения (16) и граничных условий (11) следует, что

$$u_n=-\left[D^j w_{3n}^{(1)}(z_3)/D^j w_{3n}^{(3)}(z_3)\right]\big|_{z_3=z_3^0}, \quad D=d/dz_3,$$

где $j=0$ при условии (11, а) и $j=1$ при условии (11, б).

Получим разложение плоской волны в ряд по волновым функциям Ламе. Фиксируем r' в формуле (16) и устремим r' к бесконечности. Пусть $\mathbf{r}=(r, \theta, \varphi)$, $\mathbf{r}'=(r', \theta', \varphi')$, тогда, используя формулы (1), (2), получаем, что при $r'\to\infty$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=r'-r[\cos\theta'\cos\theta+\sin\theta'\sin\theta\cos(\varphi'-\varphi)]+O(1/r'),$$

$$z_3'=r'^2+O(1),\ (z_1'-a_j)(z_2'-a_j)=f'(a_j)x_j^2(r')^{-2}+O(1/r'),\ j=1, 2.$$

Следовательно

$$\exp\{-i(\mathbf{k}, \mathbf{r})\}=-8\pi\sum_n w_n^{-1}\Psi_n(z_1, z_2)\Psi_n(z_1^0, z_2^0), \tag{18}$$

где $\mathbf{k}=(k, \theta_0, \varphi_0)$ и $\theta_0, \varphi_0, z_1^0, z_2^0$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} (z_1^0-a_1)(z_2^0-a_1)&=f'(a_1)\cos^2\varphi_0\sin^2\theta_0, \\ (z_1^0-a_2)(z_2^0-a_2)&=f'(a_2)\sin^2\varphi_0\sin^2\theta_0. \end{aligned} \tag{19}$$

Рассмотрим задачу дифракции плоской волны $u_0=\exp\{-i(k, r)\}$ на теле $\tilde{D}$. Рассеянное поле снова возьмем в виде (17), и из (11), (18) находим, что

$$u_n=-4\pi D^j w_{3n}^{(1)}(z_3)/D^j w_{3n}^{(3)}(z_3)\big|_{z_3=z_3^0},$$

где $j=0$ при условии (11, а) и $j=1$ при условии (11, б). Амплитуда рассеяния имеет вид

$$f(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)=2\sum_n u_n\Psi_n(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)\Psi_n(z_1^0, z_2^0), \tag{20}$$

где θ, φ и $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ связаны соотношениями вида (19). Для полного попереч-

ника рассеяния $\sigma = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \sin\theta |f|^2$ справедлива формула

$$\sigma = \sum_n |u_n|^2 |\Psi_n(z_1^0, z_2^0)|^2,$$

которая следует из (20) и из (8), (12). Аналогично решаются задачи Дирихле и Неймана для уравнения (1) во внешности эллипсоида.

Безусловно, волновые функции Ламе — аппарат довольно громоздкий. Но, к сожалению, нет никакой другой системы координат, кроме эллипсоидальной, в которой бы точно решалась задача дифракции на конечном теле, не являющимся телом вращения. Использование волновых функций Ламе потребует создания новых численных методов. Такие методы созданы в последние годы для расчета сфероидальных функций и применены к задачам дифракции в работах [14, 15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. Т. 2.
2. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.
4. *Arscott F. M.* Periodic differential equations.— N. Y.: Pergamon Press, 1964.
5. *Arscott F. M., Sleeman B. D.* High-frequency approximation to ellipsoidal wave functions // Mathematika, t. 1970. V. 17. № 1. P. 39–46.
6. *Arscott F. M., Taylor P. J., Zahar R. V. M.* On the numerical computation at ellipsoidal wave functions // Math. Comp. 1983. V. 40. № 161. P. 367–380.
7. *Вайнштейн Л. А.* Лучевые потоки в трехосном эллипсоиде // Электроника больших мощностей. М.: Наука, 1965.
8. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.— Л.: Гостехиздат, 1950.
9. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ, 1939.
10. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. М.: Физматгиз, Т. 2. 1963.
11. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1952.
12. *Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю.* Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976.
13. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
14. *Абрамов А. А., Дышко А. Л., Конюхова Н. Б., Пак Т. В., Парийский Б. С.* Вычисление вытянутых сфероидальных функций решением соответствующих дифференциальных уравнений // ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24. № 1. С. 3–18.
15. *Конюхова Н. Б., Пак Т. В.* Дифракция плоской звуковой волны на жестком вытянутом сфероиде // Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1985.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20.VIII.1987