ность относительных измерений скорости не превышала 0,5 м/с. Температура изменялась со скоростью 1÷2° К/мин. Перед измерениями образцы термостатировались в течение 30÷40 мин с точностью 3 К.

На фигуре приведен график температурной зависимости относительного изменения скорости ультразвука $\Delta v/v$ для образца ФХС, подвергнутого термообработке при $T=580°$ С в течение 24 ч в режиме нагрева (участок *ABC*) и охлаждения (участок *CDA*) – кривая *1*. При повторном прохождении по температуре области гистерезиса вид кривой $v(T)$ воспроизводился (см. фигуру). Аналогичные кривые наблюдались для всех исследованных образцов ФХС в отличие от образца стекла, имеющего близкий состав, но без фотохромирующих добавок (кривая *2*). Исходя из акустических данных можно выявить различие температур плавления и рекристаллизации микрокристаллов CuCl. При повышении температуры в области *B* начинается процесс плавления кристаллической фазы, продолжающийся на интервале *BC*. Значительное понижение температурного коэффициента скорости ультразвука на участке *BC*, очевидно, обусловлено уменьшением упругих модулей микрокристаллов в результате плавления. При уменьшении температуры участок *CD* соответствует сохранению расплавленного состояния CuCl. В области температур *D* начинается кристаллизация, заканчивающаяся в области *A*. Принимая середину температурного интервала *BC* за температуру плавления и середину интервала *DA* за температуру рекристаллизации, можно найти их разность, для данного образца составляющую величину $\Delta T \simeq 90$ К.

Измерения, проведенные в остальных образцах, показали, что значение ΔT зависит от режима термообработки, т. е. в соответствие с [2] от размера микрокристаллов CuCl. Отметим, что относительное изменение скорости ультразвука при гистерезисе $\Delta v/v \simeq (1 \div 2) \cdot 10^{-3}$ согласуется с концентрацией меди в ФХС порядка $5 \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, измерение температурной зависимости скорости ультразвука может служить методом исследования фазовых превращений в гетерогенных ФХС. При этом коэффициент поглощения ультразвука в пределах погрешности 10% не имеет особенностей в области плавления микрокристаллов.

В заключение авторы благодарят Цехомского В. А. за предоставление образцов ФХС.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цехомский В. А.* Фотохромные оксидные стекла // Физика и химия стекла. 1978. Т. 4. № 1. С. 3–21.
2. *Голубков В. В., Екимов А. И., Онущенко А. А., Цехомский В. А.* Кинетика роста микрокристаллов CuCl в стеклообразной матрице // Физика и химия стекла. 1981. Т. 7. № 4. С. 397–401.
3. *Труэлл Р., Эльбаум И., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972. 307 с.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступило в редакцию 24.III.1987

УДК 534.232

РАСЧЕТ ТРАНСФОРМИРУЮЩИХ СВОЙСТВ КОНЦЕНТРАТОРОВ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Сазонов И. А.

Обычно параметры ультразвуковых колебательных систем подбирают таким образом, чтобы частоты свободных колебаний преобразователя и концентратора равнялись друг другу [1]. Во время технологического процесса рабочий торец концентратора испытывает нагрузку со стороны обрабатываемой среды. Эта нагрузка через концентратор передается на преобразователь и меняет амплитуду и частоту колебаний системы. Точный расчет колебаний ультразвуковой системы на частоте, не совпадающей с резонансной, достаточно трудоемок. Однако если частота изменилась не сильно, а нагрузка, передаваемая на преобразователь, мала по сравнению с волновым сопротивлением преобразователя, то можно предложить упрощенный расчет колебательной системы.

Нагрузка на преобразователь со стороны концентратора Z является функцией частоты ω и импеданса z, нагружающего рабочий торец концентратора: $Z=Z(\omega, z)$, причем $Z(\omega_0, 0)=0$, где ω_0 – частота свободных колебаний концентратора. Если $|Z| \ll Z_п$, $|\Delta\omega_0| \ll \omega_0$, где $Z_п=\rho_п c_п S_п$ – волновой механический импеданс преобразователя, $\Delta\omega=\omega-\omega_0$, то нагрузку на преобразователь можно приближенно записать в виде $Z(\omega, z) \approx z_\omega(\omega_0, 0)\Delta\omega + Z_z(\omega_0, 0)z$, где $Z_\omega=\partial Z/\partial\omega$, $Z_z=\partial Z/\partial z$.

Ниже будет предложен метод вычисления величин $Z_\omega(\omega_0, 0)$ и $Z_z(\omega_0, 0)$ для концентраторов произвольной формы.

Колебания концентратора удовлетворяют следующей системе уравнений [2]:

$$\partial F/\partial x+\rho\omega^2 SU=0,$$
$$F=\rho c^2 S\partial U/\partial x, \tag{1}$$

где F – растягивающая сила, U – продольное смещение, ρ – плотность, c – скорость звука, $S(x)$ – площадь поперечного сечения. Ось x выберем таким образом, чтобы рабочий торец соответствовал $x=0$, а входной торец – $x=L$.

Запишем систему (1) в безразмерных переменных: $\xi=x/L$, $u(\xi)=U(x(\xi))/U(0)$, $f(\xi)=F(x(\xi))L\rho^{-1}c^2S(0)^{-1}$, $a(\xi)=S(x(\xi))/S(0)$, $\lambda=\omega^2L^2/c^2$,

$$u'=a^{-1}f, \quad f'=-a\lambda u. \tag{2}$$

Штрих означает дифференцирование по ξ.

При выполнении граничных условий $f(0)=0$, $f(1)=0$ концентратор будет совершать свободные колебания. Величины u, f и λ, соответствующие свободным колебаниям, будем снабжать индексом «0». Так как $u_0(0)=1$, то по определению коэффициента усиления концентратора K амплитуда на его входе равна $u_0(1)=K^{-1}$.

Фундаментальную матрицу системы (2) при $\lambda=\lambda_0$ запишем в виде

$$\Psi=\begin{bmatrix} u_0 & u_1 \\ f_0 & f_1 \end{bmatrix}, \quad f_0=au_0',$$

$$u_1=u_0\int_0^\xi a^{-1}u_0^{-2}\,d\xi, \quad f_1=au_0'\int_0^\xi a^{-1}u_0^{-2}\,d\xi+u_0^{-1}.$$

Выражение для u_1 через u_0 взято из [2]. Нетрудно показать, что $\det\Psi=1$ (см., например, [3]). На торцах концентратора это тождество принимает вид $u_0(0)f_1(0)=1=u_0(1)f_1(1)$, следовательно, $f_1(0)=1$, $f_1(1)=K$.

При нагружении рабочего торца импедансной нагрузкой $\zeta(0)=f(0)/u(0)$, не меняющей частоты колебаний системы, колебания концентратора будут описываться линейной комбинацией столбцов матрицы Ψ. Если нагрузка мала $|\zeta(0)|\ll 1$, то эти колебания можно приближенно записать в виде $u(\xi)=u_0(\xi)+\zeta(0)u_1(\xi)$, $f(\xi)=f_0(\xi)+\zeta(0)f_1(\xi)$. Входной торец концентратора создаст следующую нагрузку на преобразователь: $\zeta(1)=f(1)/u(1)\approx\zeta(0)f_1(1)/u_0(1)=\zeta(0)K^2$. Отсюда

$$\partial\zeta(1)/\partial\zeta(0)\approx K^2. \tag{3}$$

Если записать (3) в исходных переменных, то получим выражение для $Z_z(\omega_0, 0)$:

$$Z_z(\omega_0,\ 0)=K^2. \tag{4}$$

Пусть теперь при ненагруженном рабочем торце концентратора изменилась частота системы: $\lambda=\lambda_0+\Delta\lambda$, причем $|\Delta\lambda|\ll\lambda_0$. Представим величины u и f, соответствующие колебаниям концентратора с измененной частотой, в виде $u=u_0+\Delta u$, $f=f_0+\Delta f$, а величины Δu и Δf найдем из (2) методом малых возмущений. Расчет дает:

$$\Delta u=\Delta\lambda[u_0(\xi)A(\xi)+u_1(\xi)B(\xi)],$$
$$\Delta f=\Delta\lambda[f_0(\xi)A(\xi)+f_1(\xi)B(\xi)],$$
$$A=\int_0^\xi au_0u_1d\xi, \quad B=-\int_0^\xi au_0^2\,d\xi.$$

Следовательно, при уходе частоты колебательной системы от резонансной входной торец концентратора создаст следующую нагрузку на преобразователь $\zeta(1)=f(1)/u(1)\approx\Delta f(1)/u_0(1)=-K^2B(1)\Delta\lambda$. Отсюда $\partial\zeta(1)/\partial\Delta\lambda=-K^2B(1)$ или в размерном виде

$$Z_\omega(\omega_0,\ 0)=i\rho S(0)L\chi K^2,$$
$$\chi=2B(1)=2L^{-1}U_0^{-2}(0)S^{-1}(0)\int_0^L U_0^2(x)S(x)\,dx. \tag{5}$$

Для расчета величин $Z_z(\omega_0, 0)$ и $Z_\omega(\omega_0, 0)$ достаточно знать коэффициент усиления концентратора и форму его резонансных колебаний. Для применяемых на практике форм концентраторов такие данные содержатся, например, в [1, 4].

Заметим, что все выражения, полученные выше, остаются справедливыми, если $S(x)$ кусочно-непрерывна, следовательно, описанный метод применим и для составных концентраторов [5].

Вычислим амплитуду колебаний рабочего торца колебательной системы с импедансной нагрузкой z, используя формулы (4) и (5). Для простоты аппроксимируем преобразователь однородным стержнем [6]. Расчет дает

$$U(0)=KU_{\text{п}}=\{[2Q_{\text{п}}\Delta\omega\omega_0^{-1}(1+\omega_0\rho S(0)LK^2\chi\pi^{-1}Z_{\text{п}}^{-1})-$$
$$-2\,\mathrm{Im}\,zK^2Q_{\text{п}}\pi^{-1}Z_{\text{п}}^{-1}]^2+[1+2\,\mathrm{Re}\,zK^2Q_{\text{п}}\pi^{-1}Z_{\text{п}}^{-1}]^2\}^{-1/2}, \qquad (6)$$

где $Q_{\text{п}}$ – добротность преобразователя, $U_{\text{п}}$ – амплитуда резонансных колебаний ненагруженного преобразователя, отсоединенного от концентратора, при том же напряжении (если преобразователь пьезоэлектрический) или при той же силе тока (если преобразователь магнитострикционный).

Формула (6) дает возможность рассчитать оптимальный коэффициент усиления концентратора для получения максимальной амплитуды колебаний рабочего торца при данной нагрузке. Используя (6), можно также рассчитать величину нагрузки со стороны обрабатываемой среды по данным измерения ухода частоты и уменьшения амплитуды колебаний системы.

Добротность колебательной системы без нагрузки равна $Q=\omega_0/\Delta\omega_*$, где $\Delta\omega_*$ – уход частоты, при котором амплитуда падает в $\sqrt{2}$ раз. Из (6) нетрудно получить

$$Q=Q_{\text{п}}(1+\rho S(0)LK^2\chi\pi^{-1}Z_{\text{п}}^{-1}). \qquad (7)$$

Формула (7) дает возможность эмпирически оценить величину χ для конкретного концентратора по данным измерения добротности преобразователя и добротности ненагруженной колебательной системы.

В заключение приведем аналитические выражения для величин K и χ для наиболее употребительных типов концентраторов, а также для удобства приведем и уравнения частот для них.

Экспоненциальный концентратор [1] ($a=\exp(2\xi\ln N)$, где $N=(S(L)/S(0))^{1/2}$): $K=N$, $\chi=1$, частота концентратора определяется уравнением $\varphi^2=\pi^2n^2+\ln^2 N$, где $n=1, 2, 3, \ldots$, $\varphi=\omega L/c$ – безразмерная частота.

Ступенчатый концентратор [5]

$$a=\begin{cases} 1, & \xi<1/2 \\ N^2, & \xi>1/2 \end{cases}$$

$$K=N^2;\quad \chi=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{N^2}\right);\quad \varphi=\pi.$$

Конический концентратор [1] ($a=[1+(N-1)\xi]^2$), его частота определяется трансцендентным уравнением

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{\varphi}{\varphi^2N(1-N)^{-2}+1},$$

а величины K и χ могут быть выражены через φ:

$$K=\frac{\sin\varphi}{\varphi}\left[\frac{\varphi^2N^2}{(N-1)^2}+1\right]$$

$$\chi=1+\frac{(N-1)^2}{\varphi^2}+\left[1-\left(\frac{N-1}{\varphi}\right)^2\right]\frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}-\frac{2(N-1)}{\varphi^2}\sin^2\varphi.$$

Ампульный концентратор [4]:

$$a=\begin{cases} 1 & \xi<\xi_1 \\ \exp[-(\xi-\xi_2)^2\varphi^2/2], & \xi_1<\xi<\xi_2, \\ N^2, & \xi>\xi_2 \end{cases}$$

где $\xi_1=\varphi_1/\varphi$, $\xi_2=(\varphi_1+\varphi_2)/\varphi$, $\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\pi/2$, $\varphi_1=\mathrm{arctg}(2\sqrt{\ln N})^{-1}$, $\varphi_2=2\sqrt{\ln N}$. Для него величины K и χ равны

$$K=\sqrt{4\ln N+1}$$

$$\chi=\frac{\varphi_1}{\varphi}-\frac{\varphi_2}{\varphi K^2}+\frac{N^2}{\varphi K^2}\left[\sqrt{2\pi}\,\mathrm{erf}(\sqrt{2\ln N})+\frac{\pi}{2}\right],$$

где $\mathrm{erf}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ – функция ошибок.

Концентратор типа «конус-цилиндр» [5]

$$a=\begin{cases} 1, & \xi<\xi_1 \\ [1+(N-1)(\xi-\xi_1)\varphi/\varphi_2]^2, & \xi>\xi_1, \end{cases}$$

где $\xi_1=\varphi_1/\varphi$, $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$; величина φ_1 определяется трансцендентным уравнением

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{\varphi_2(N-1)^2-[N\varphi_2^2+(N-1)^2]\operatorname{tg}\varphi_r}{\varphi_2[\varphi_2N-(N-1)\operatorname{tg}\varphi_2]},$$

а величину φ_2 можно взять равной двум, тогда для используемых на практике значений N величина K будет близка к своему максимальному значению [5]. Величины K и χ выражаются через φ_1 и φ_2:

$$K=\frac{N\varphi_2}{\varphi_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)+(N-1)\cos\varphi_1\sin\varphi_2}$$

$$\chi=\frac{1}{\varphi}\left\{\varphi_1+\frac{1}{2}\sin 2\varphi_1+\left[1+\left(\frac{N-1}{\varphi_2}\right)^2\cos^2\varphi_1-\frac{N-1}{\varphi_2}\sin 2\varphi_1\right]\varphi_2+\right.$$

$$+\left[\cos 2\varphi_1-\left(\frac{N-1}{\varphi_2}\right)^2\cos^2\varphi_1+\frac{N-1}{\varphi_2}\sin 2\varphi_1\right]\sin\varphi_r\cos\varphi_2-$$

$$\left.-\left[\frac{N-1}{\varphi_2}\cos^2\varphi_1-\sin\varphi_1\cos\varphi_1\right]\sin^2\varphi_2\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меркулов Л. Г.* Теория ультразвуковых концентраторов // Акуст. журн. 1957. Т. 3. № 3. С. 230–238.
2. *Eisner E.* Complete solution of the «Webster» horn equation // Jour. Acoust. Soc. Amer. 1967. V. 41. № 4. Pt 2. P. 1128–1146.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 1978.
4. *Kleesattel C.* Vibrator ampullaceus Eine Längoschwingungsform zur Erzengung grösster Schallschnellen und Wandlerleistugen // Acoustica, 1962. V. 12. № 5. P. 322–334.
5. *Меркулов Л. Г., Харитонов А. В.* Теория и расчет составных концентраторов // Акуст. журн. 1959. Т. 5. № 2. С. 183–190.
6. *Гутин Л. Я.* УК-теория магнитострикционного преобразователя // Избранные труды. Л.: Судостроение. 1977. С. 135–146.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
29.IX.1986

УДК 534.231

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ШОХА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛЯ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Сумбатян М. А.

Исследованию ближнего поля плоского излучателя, расположенного на поверхности акустического полупространства, посвящено много работ [1–4]. Для поршневого излучателя произвольной формы в плане, закрепленного в жестком экране, Шох [5] сумел свести рассматриваемую проблему к вычислению однократного интеграла по конечному отрезку. Суть его метода состоит в следующем. Пусть амплитуда скорости гармонических колебаний поршня равна v_0, тогда интеграл Рэлея для потенциала скорости (S – площадь излучателя)

$$\Phi(M)=\frac{v_0}{2\pi}\iint\limits_S\frac{e^{ikr}}{r}\,dS=\frac{v_0}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\rho_1(\varphi)}\frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\,\rho\,d\rho \tag{1}$$

заменой переменных (см. фиг. 1) $r^2=\rho^2+z^2$, $dS=\rho d\rho d\varphi=rdrd\varphi$, $rdr=\rho d\rho$ сводится к виду ($r_1(\varphi)=(z^2+\rho_1^2)^{1/2}$)

$$\Phi=\frac{v_0}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_z^{r_1(\varphi)}e^{ikr}\,dr=-\frac{v_0}{ik}\left[e^{ikz}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{ikr_1(\varphi)}\,d\varphi\right]. \tag{2}$$