АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 1

УДК 534

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ОБОЛОЧКЕ ВРАЩЕНИЯ

Бойко А. И., Максимова Н. О.

На основании метода двухмасштабных разложений, который в акустике получил название метод сращивания, решена задача дифракции плоской звуковой волны на оболочке вращения, заполненной вакуумом.

Рассмотрим ограниченную полую упругую оболочку, внешняя поверхность которой описывается в цилиндрических координатах r, ψ, z уравнением $r=\varepsilon F_1(z)$, а внутренняя поверхность, ограничивающая полость,— уравнением $r=\varepsilon F_2(z)$. Здесь $\varepsilon>0$ — малый параметр, функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ заданы на отрезке $[-l, l]$, достаточно гладкие на нем и такие, что $F_1(z)>F_2(z)>0$ при $|z|<l$, $F_1(\mp l)=F_2(\mp l)=0$, $2l$ — максимальный размер оболочки. Таким образом, оболочка может иметь переменную толщину, равную нулю только при $z=\mp l$. Параметры упругой среды, из которой состоит оболочка λ, μ, $\tilde{\rho}$, где λ, μ — коэффициенты Ламе, $\tilde{\rho}$ — плотность. Параметры акустической среды, окружающей оболочку, ρ, c. В полости внутри оболочки находится вакуум.

На оболочку падает плоская волна $v=A_0 \exp\{ikR\cos\gamma\}$, где $k=\omega/c$ — волновое число; $\cos\gamma=\cos\theta_0\cos\theta+\sin\theta_0\sin\theta\cos(\varphi_0-\varphi)$; R, θ, φ — сферические координаты; θ_0, φ_0 — углы, определяющие направление падения плоской волны. Согласно условию задачи, $\varepsilon=k\max F_1(z)\ll 1$.

Обозначим через $p=u+v$ полное поле вне оболочки. Здесь u — рассеянное поле. Функция p удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца. Для вектора смещений $\mathbf{w}$ внутри оболочки выполняется уравнение теории упругости $(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{w}-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{w}=\omega^2\tilde{\rho}\mathbf{w}$. На внешней границе S_1 оболочки и границе S_2 полости имеют место условия

$$w_n|_{s_1}=\frac{1}{\omega^2\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{s_1}, \qquad \sigma_{nn}|_{s_1}=-p|_{s_1}, \qquad \sigma_{n\tau}|_{s_1}=0,$$

$$\sigma_{nn}|_{s_2}=\sigma_{n\tau}|_{s_2}=0,$$

где w_n — нормальная составляющая вектора смещения $\mathbf{w}$, σ_{nn} — нормальное напряжение, $\sigma_{n\tau}$ — сдвиговое напряжение.

Рассеянное поле удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда: $u(R, \theta, \varphi)=f(\theta, \varphi; \varepsilon)R^{-1}\exp\{ikR\}+O(R^{-2})$ при $R\to\infty$. Цель работы состоит в том, чтобы найти главный член $f_0(\theta, \varphi)$ амплитуды рассеяния $f(\theta, \varphi; \varepsilon)$.

Будем искать функцию $f_0(\theta, \varphi)$ методом сращивания асимптотических разложений [1—5]. При этом заметим, что если функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ равны константам на интервале значений z таком, что $kl_1\gg 1$, где l_1 — длина интервала, то при некоторых значениях угла падения θ_0 возможен резонанс, связанный с изгибными колебаниями оболочки [6, 7] и аналогичный резонансу в стержне [8]. В этом случае необходимо суммировать большое число членов внутреннего разложения поля u, справедливого в ближней зоне дифракции плоской волны на оболочке. Во всех остальных случаях достаточно ограничиться первыми тремя, чтобы получить главный член амплитуды изгибных колебаний с точностью до собственных крутильных колебаний оболочки, которые не вносят вклад в рассеянное поле.

Опустив громоздкие промежуточные выкладки, получим для главного

члена амплитуды рассеяния следующее выражение:

$$4f_0(\theta,\varphi)=\varepsilon^2A_0\int_{-l}^{l}\left\{2k^2\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)\frac{\tilde{\rho}[S_1(z)-S_2(z)]-\rho S_1(z)}{\tilde{\rho}[S_1(z)-S_2(z)]+\rho S_1(z)}-\right.$$

$$\left.-k^2(1-\cos\theta\cos\theta_0)+\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\left[\frac{k_l^2k_t^2}{k_t^2-k_l^2}S_1(z)+k_t^2S_2(z)\right][S_1(z)-S_2(z)]^{-1}\right\}\times \tag{1}$$

$$\times S_1(z)\exp\{ikz(\cos\theta_0-\cos\theta)\}dz+\varepsilon^2\omega^2\rho\int_{-l}^{l}\left[2\nu_{ст}S_1(z)\frac{d}{dz}w_0(z)+\right.$$

$$\left.+w_0(z)\frac{d}{dz}S_1(z)\right]\exp\{-ikz\cos\theta\}dz,$$

где $w_0(z)$ — главный член продольных колебаний оболочки удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dz}\left\{[S_1(z)-S_2(z)]\frac{d}{dz}w_0(z)\right\}+k_{ст}^2[S_1(z)-S_2(z)]w_0(z)= \tag{2}$$

$$=A_0E_{ст}^{-1}\exp\{ikz\cos\theta\}\left[2i\nu_{ст}S_1(z)+(2\nu_{ст}-1)\frac{d}{dz}S_1(z)\right].$$

Здесь через $\varepsilon^2\pi S_1(z)$ и $\varepsilon^2\pi S_2(z)$ обозначены соответственно площади поперечных сечений внешней поверхности оболочки и полости, $\nu_{ст}$ — коэффициент Пуассона, $E_{ст}$ — модуль Юнга, $k_{ст}$ — волновое число продольных волн в стержне, k_l — волновое число продольных волн в свободном упругом пространстве, k_t — волновое число поперечных волн.

Формула (1) дает решение поставленной задачи, за исключением той ситуации, когда $k_{ст}l$ есть одно из собственных значений однородного уравнения (2). В этом случае необходимо считать $k_{ст}$ комплексным с мнимой добавкой, отвечающей потерям энергии продольных колебаний в оболочке.

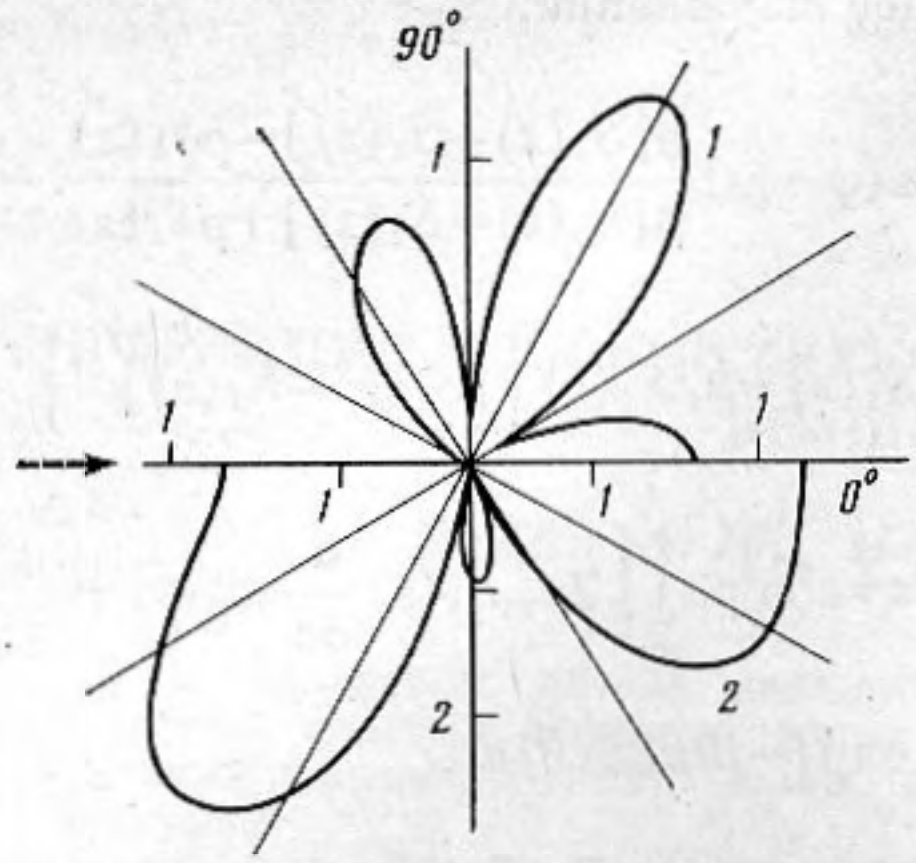
В настоящей работе величины $S_1(z)$ и $S_2(z)$ являются произвольными гладкими функциями. Некоторые частные значения функций $S_1(z)$ и $S_2(z)$ при более общих предположениях исследовались другими авторами. Случай, когда функции $S_1(z)$ и $S_2(z)$ являются постоянными, а длина оболочки неограничена, рассмотрен в работе [6]. Рассеяние на цилиндрических оболочках с гладкой выпуклой направляющей детально изучено в работе [9].

В качестве примера расчета по формуле (1) рассмотрим вытянутую сфероидальную оболочку, у которой $S_1(z)=l^2-z^2$, $S_2(z)=(1-\delta)S_1(z)$, для значения $kl=5$. Здесь параметр $0<\delta\leqslant 1$ характеризует толщину оболочки. При $\delta=1$ оболочка превращается в упругий сфероид. Зададим внешнюю поверхность оболочки в сфероидальных координатах ξ, η, φ как $\xi=\xi_0$, где $\varepsilon^2=2(\xi_0-1)$. Для значений ξ_0 таких, что $1<\xi_0\leqslant 1{,}005$, метод сращивания в случае акустически идеально жесткого сфероида дает хорошее согласие с численными расчетами, выполненными по точным формулам [10].

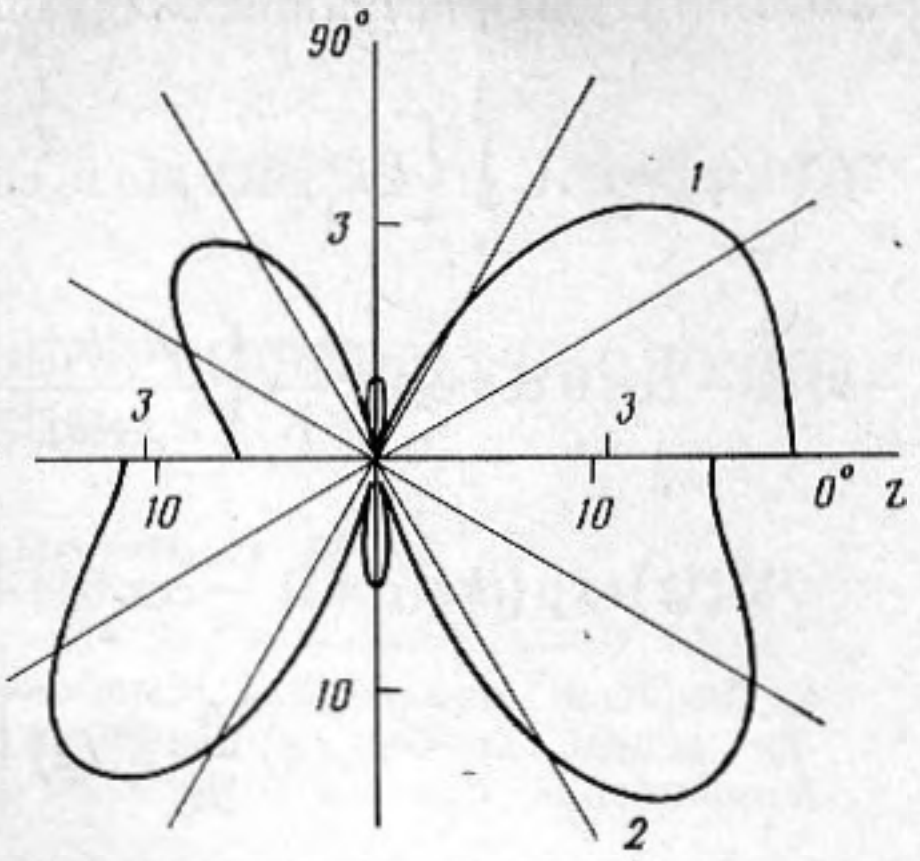
При $\delta\to 0$ поле, рассеянное оболочкой, стремится к полю дифракции плоской волны на акустически идеально мягком теле вращения. В этом случае для нахождения рассеянного поля необходимо воспользоваться результатами работы [11].

Пусть оболочку окружает вода. Параметры λ, μ, $\tilde{\rho}$ материала оболочки и производные от них величины, входящие в формулу (1) и уравнение (2), соответствуют меди, латуни и стали. Причем для меди параметры λ, μ, $\tilde{\rho}$ таковы, что $k_{ст}l=2{,}03$, для латуни $k_{ст}l=2{,}12$ и для стали $k_{ст}l=1{,}47$. Для латуни величина $k_{ст}l$ лежит вблизи первого собственного значения $k_1=2{,}13$ однородного дифференциального уравнения (2). Уравнение (2) численно решалось методом дифференциальной прогонки [12].

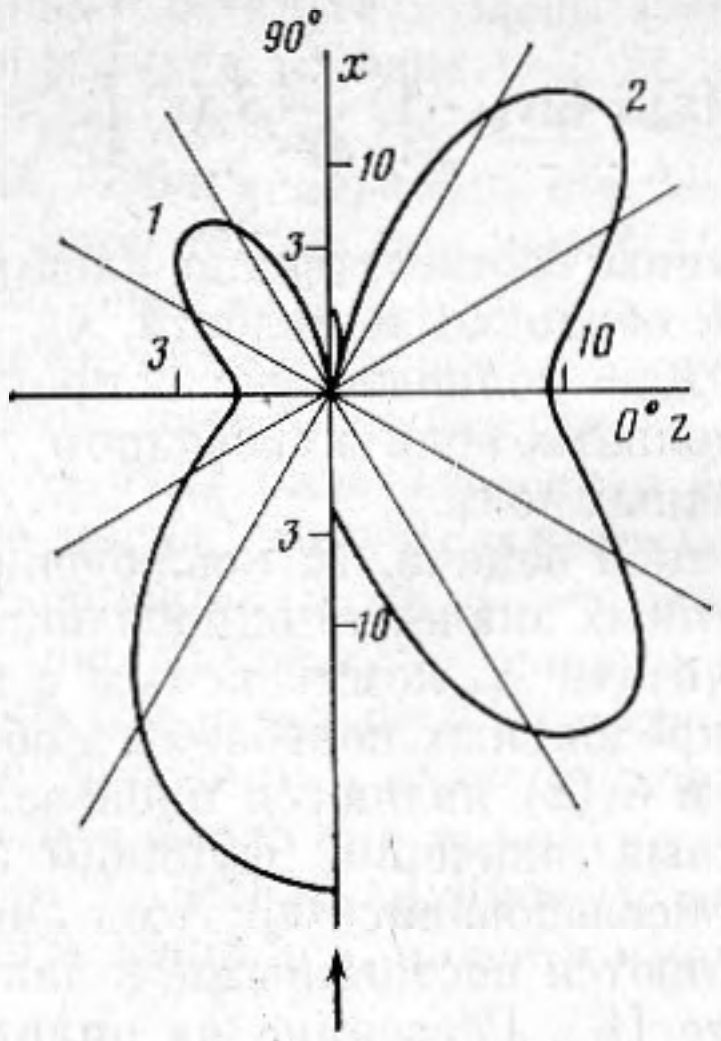
На фиг. 1—4 приведены графики функций $(\varepsilon^2A_0l)^{-1}|f_0(\theta,\varphi)|$, являющихся диаграммами направленности рассеянного поля, для оболочек из меди, латуни и стали при различных углах падения θ_0 и для различных



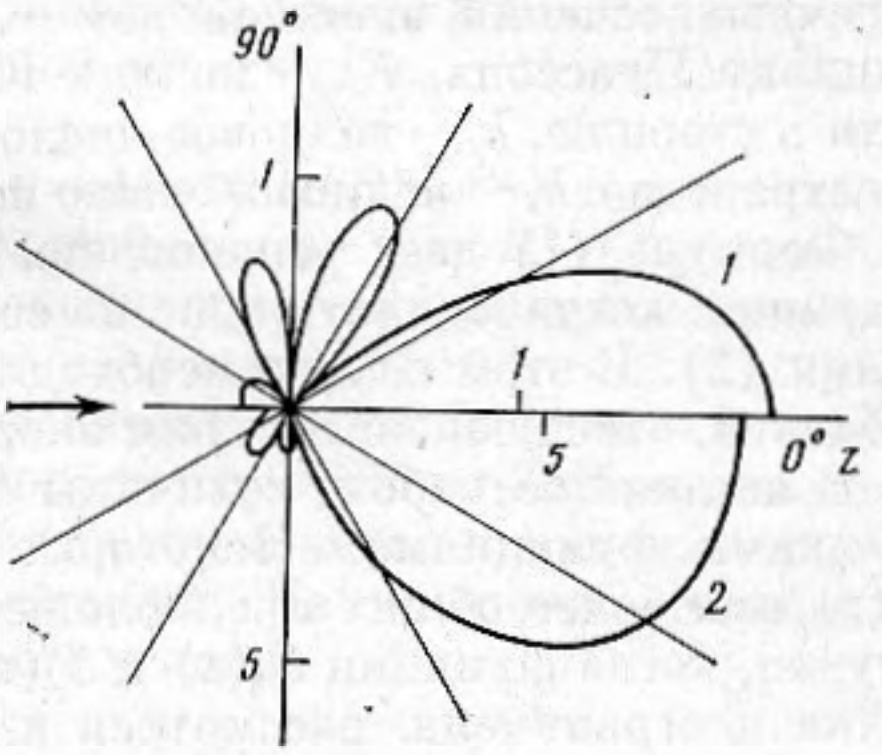
Фиг. 1. Диаграмма рассеянного поля для меди (*1*) и латуни (*2*) при $\theta_0=0°$ и $\sigma=1$



Фиг. 2. Диаграмма рассеянного поля для меди (*1*) и латуни (*2*) при $\theta_0=0°$ и $\sigma=0{,}2$



Фиг. 3. Диаграмма рассеянного поля для меди (*1*) и латуни (*2*) при $\theta_0=90°$, $\varphi=\varphi_0$ и $\delta=0{,}2$



Фиг. 4. Диаграмма рассеянного поля для стали при $\theta_0=0°$ и $\delta=0{,}2$ (*1*), $\delta=0{,}05$ (*2*)

значений параметра δ. Стрелки на графиках указывают направление падения плоской волны. Каждой кривой на графиках соответствует свой масштаб, который на осях указывается в той же полуплоскости, где лежит соответствующая этому масштабу кривая. На фиг. 1, 2 и 4 ось z есть ось вращения диаграмм направленности. На фиг. 3 ось x есть ось симметрии диаграмм.

Из приведенных графиков видно, что рассеянное поле существенно зависит от толщины оболочки, материала и от того, насколько близко мы находимся к одной из собственных частот колебаний оболочки.

Авторы приносят благодарность Тютекину В. В. и Федорюку М. В. за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ван Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1957.
2. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
3. *Федорюк М. В.* Рассеяние звуковых волн тонким акустическим жестким телом вращения // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 4. С. 605–609.
4. *Федорюк М. В.* Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 1. С. 167–186.

5. *Бойко А. И.* Рассеяние плоских волн тонким телом вращения // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 3. С. 321–325.
6. *Лямшев Л. М.* Дифракция звука на безграничной тонкой цилиндрической оболочке // Акуст. журн. 1958. Т. 4. № 2. С. 161–167.
7. *Бугаев В. В., Музыченко В. В., Паникленко А. П.* К вопросу об условиях пространственного совпадения при рассеянии плоской волны на цилиндрической оболочке // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 5. С. 660–662.
8. *Лямшев Л. М., Рудаков С. Н.* Экспериментальное исследование незеркального отражения звука тонкими ограниченными стержнями в воде // Акуст. журн. 1958. Т. 4. № 3. С. 283–285.
9. *Векслер Н. Д.* Резонансное рассеяние в гидроакустике. Таллин.: Валгус, 1984.
10. *Конюхова Н. Б., Пак Т. В.* Дифракция плоской звуковой волны на жестком вытянутом сфероиде. М.: ВЦ АН СССР, 1985.
11. *Жданова Г. В.* Задача Дирихле для оператора Гельмгольца во внешности тонкого тела вращения // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 8. С. 1403–1411.
12. *Абрамов А. А., Бураго Н. Г., Диткин В. В. и др.* Пакет прикладных программ для линейных двухточечных краевых задач. М.: ВЦ АН СССР, 1982.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4.XI.1986