

УДК 534.2:532

ОБ УЛУЧШЕНИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

Ромакин А. Г., Титаренко В. В.

Рассмотрен метод улучшения сходимости асимптотических разложений в применении к задаче о затухании пилообразной волны давления.

Пилообразные волны представляют интересный предельный случай акустических волн конечной амплитуды и возникают при их распространении в идеальной среде. Законы их затухания исследованы в целом ряде теоретических и экспериментальных работ [1-6]. В частности, в [1-3] различными путями получено так называемое приближение слабых ударных волн, которое, однако, согласуется с данными экспериментов лишь качественно.

В настоящей заметке с помощью аппроксимант Паде получено эффективное решение указанной задачи, хорошо согласующееся с численным и с данными экспериментов [3-6]. Метод может быть использован в других задачах нелинейной акустики.

Скорость затухания пилообразной волны, распространяющейся в идеальном совершенном газе, дается соотношением [6]:

$$\frac{d(1/\delta)}{d(x/\lambda)} = \frac{6\gamma}{R\delta^3} \Delta S. \quad (1)$$

Здесь $\delta = (p_2 - p_1)/p_1$; p_1, p_2 — скачки давления в «голове» и «хвосте» пилообразной волны; x — путь, пройденный волной; λ — длина волны; R — универсальная газовая постоянная; ΔS — изменение энтропии; $\gamma = c_p/c_v$. Выражение для ΔS и его разложение в ряд при $\delta < 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{R}{\gamma-1} \ln \left[(1+\delta) \left(\frac{\delta(\gamma+1)+2\gamma}{\delta(\gamma-1)+2\gamma} \right)^{-\gamma} \right] = \\ &= \frac{R(\gamma+1)\delta^3}{12\gamma^2} \left[1 - \frac{3}{2}\delta + \frac{3(11\gamma^2+1)}{20\gamma^2}\delta^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение (1) с учетом точного выражения (2) можно проинтегрировать лишь численно (фигура, кривые 1; $\delta_0 = 0,5; 0,1$).

В приближении слабых ударных волн [1-3] ограничиваются первым слагаемым в разложении (2). Тогда уравнение (1) легко интегрируется. Удовлетворяя, например, начальному условию $\delta = \delta_0$ при $x = 0$, получим (фигура, кривые 2)

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta_0} \right). \quad (3)$$

Экспериментальные исследования подтверждают линейный характер зависимости $1/\delta$ от x/λ при достаточно больших x/λ , однако значения наблюдаемых угловых коэффициентов составляют $\approx 0,7$ от значений, подсчитанных на основании (3) [3]. Отметим, что по этому закону перепад давления изменяется обратно пропорционально расстоянию, пройденному волной.

Учет нелинейности процесса путем сохранения в (2) большего числа слагаемых неэффективен. Так, интегрируя (1) для трех слагаемых из

(2) и удовлетворяя условию $\delta = \delta_0$ при $x = 0$, получим

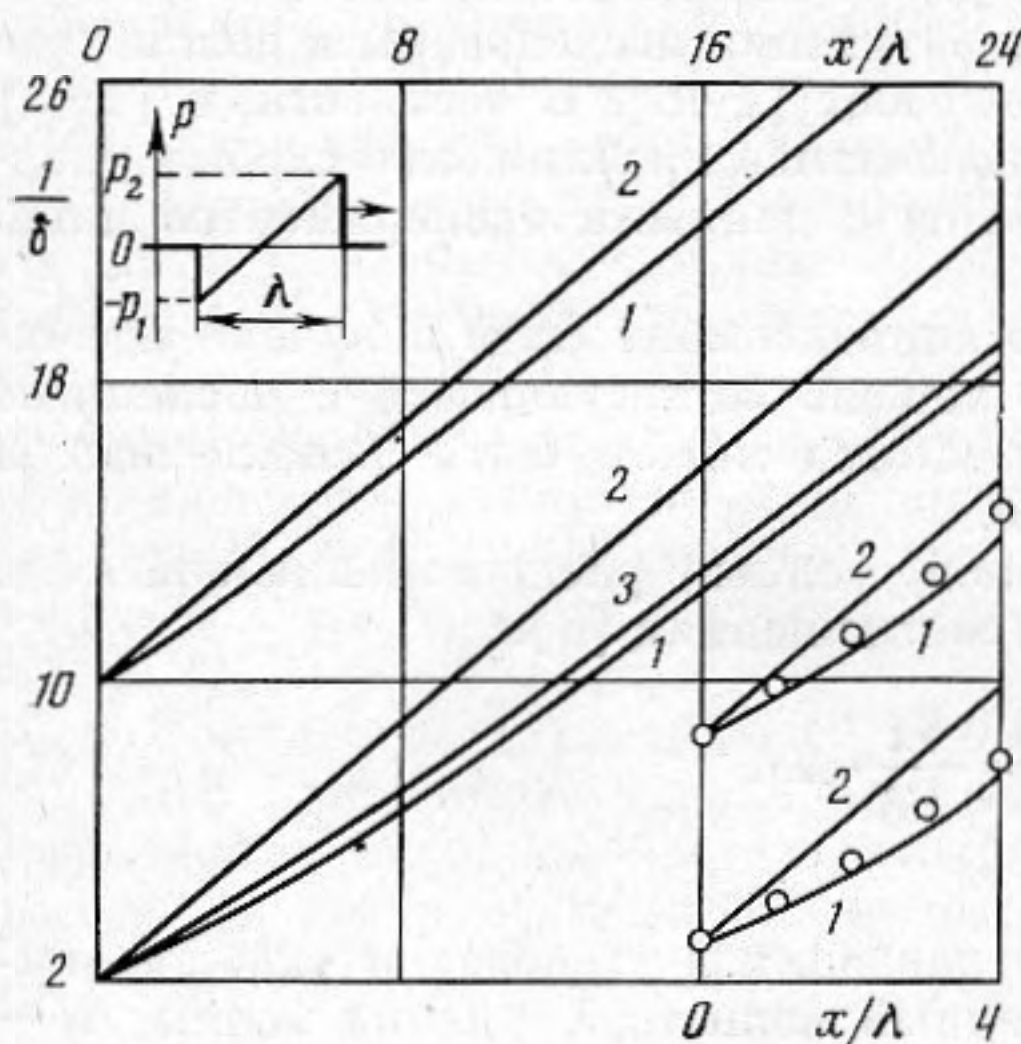
$$\frac{x}{\lambda} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} [F_1(\delta) - F_1(\delta_0)],$$

$$F_1(\delta) = \frac{1}{\delta} + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{1}{\delta^2} - \frac{3}{2\delta} + \frac{3(11\gamma^2+1)}{20\gamma^2} \right| - \frac{3(7\gamma^2+2)}{10\gamma} \times$$

$$\times \left(\frac{5}{87\gamma^2+12} \right)^{1/2} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\gamma(4-3\delta)}{\delta} \left(\frac{5}{87\gamma^2+12} \right)^{1/2} \right\}. \quad (4)$$

Найденное решение (4) громоздко, а достигнутое при этом уточнение для волн умеренной интенсивности недостаточно (фигура, кривая 3). Отметим, что аналогичная формула в [6] ошибочна.

Хорошие результаты в данной задаче дает прием улучшения сходимости асимптотических рядов с помощью аппроксимант Паде. Дадим



Затухание пилообразной волны давления. $1/\delta = p_1/(p_2 - p_1)$, x — путь, пройденный волной: 1 — численное решение и аппроксиманты Паде (6) уравнения (1); 2 — приближение слабых ударных волн (3) уравнения (1); 3 — трехчленная аппроксимация (4) уравнения (1); светлые точки — эксперимент [3]

определение. Пусть $f(\delta) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \delta^i$, c_i — известные постоянные. Аппроксимантой Паде $[M/N]_f$ функции называется рациональная функция $\left(\sum_{i=0}^M a_i \delta^i \right) / \left(\sum_{i=0}^N b_i \delta^i \right)$, коэффициенты которой $a_i b_i$ определяются из условия: $f(\delta) = [M/N]_f + O(\delta^{M+N+1})$, $b_0 = 1$. Таким образом, для построения аппроксиманты $[M/N]_f$ достаточно знать $M+N+1$ коэффициентов ряда для $f(\delta)$ [7].

Заменим правую часть (2) аппроксимантой Паде $[1/1]_{\Delta S}$ (отметим, что это эквивалентно преобразованию Шенкса первого порядка [8]). Уравнение (1) примет вид

$$\frac{d(1/\delta)}{d(x/\lambda)} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{10\gamma^2 - (4\gamma^2 - 1)\delta}{10\gamma^2 + (11\gamma^2 + 1)\delta}. \quad (5)$$

Интегрируя (5) с начальными условиями $\delta = \delta_0$, $x = 0$, получим

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} [F_2(\delta) - F_2(\delta_0)], \quad F_2(\delta) = \frac{1}{\delta} + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{1}{\delta} - \frac{4\gamma^2 - 1}{10\gamma^2} \right|. \quad (6)$$

Это простое по форме решение практически не отличается от численного (кривая, построенная по (6), и кривая 1 совпадают).

Расчеты показывают, что аппроксимация Паде является хорошей, погрешность в правой части (1) при замене ΔS одночленным, трехчленным приближением для ΔS в широком диапазоне изменения δ . Относитель-

членными разложениями и аппроксимацией Паде соответственно в процентах: при $\delta=0,5$ — 88,3; 28,3; 1,37; при $\delta=0,2$ — 32,1; 1,6; 0,11; при $\delta=0,1$ — 15,5; 0,19; 0,01.

На фигуре в правом нижнем углу дано сравнение кривых 1 и 2 с результатами измерений в трубе диаметром 25,4 см при частоте 140 Гц. Экспериментальные значения [3] отмечены светлыми точками. Таким образом, получено решение (6), которое в отличие от широко используемого решения в приближении слабых ударных волн позволяет с более высокой степенью точности рассчитывать процесс затухания пилообразных волн давления.

Необходимо отметить, что решение (6) указывает на заметную нелинейность процесса на начальном этапе распространения N -волны, где скорость затухания ее амплитуды максимальна.

Рассмотренный пример подчеркивает перспективность применения метода аппроксимант Паде в задачах нелинейной акустики. В частности, можно отметить, что аппроксимация Паде для ΔS , построенная на основании ряда (2), сходящегося при $|\delta| < 1$, является хорошим приближением для ΔS и при $\delta > 1$, в области расходимости ряда (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Наугольных К. А. О поглощении звуковых волн конечной амплитуды // Акуст. журн. 1958. Т. 4. № 2. С. 115–124.
2. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
3. Rudnick I. On the attenuation of a repeated sawtooth waves // I. Acoust. Soc. Amer. 1953. V. 25. № 5. P. 1012–1013.
4. Werth G. C., Delsasso L. P. Attenuation of repeated shock waves in gases // J. Acoust. Soc. Amer. 1954. V. 26. № 1. P. 59–64.
5. Medwin H. Attenuation of guided, repeated shock waves in gases // J. Acoust. Soc. Amer. 1964. V. 36. № 5. P. 870–878.
6. Pistorius F. M., Williams S. B. Upper limit on the use of weak-shock theory // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 55. № 6. P. 1334–1335.
7. Апресян Л. А. Аппроксиманты Паде // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 6. С. 653–674.
8. Shanks D. Non-linear transformations of divergent and slowly convergent sequences // J. Math. Phys. 1955. V. 34. № 1. P. 1–42.

Саратовский политехнический институт

Поступила в редакцию
1.VIII.1986