

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ВОЛНОВОДЕ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ  
КВАДРАТОМ КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Старков А. С.

В работе изучается модельная задача о распространении волн в безграничной среде с одним максимумом показателя преломления. При расчете звуковых полей в волноводе, ось которого находится на линии максимума показателя преломления, обычно используется либо лучевой метод, либо метод нормальных волн [1-3]. Поле лучей в волноводе образует сложную систему каустик, имеющих точки возврата и сгущающихся при увеличении расстояния между источником и точкой наблюдения. В окрестности каустик для применимости лучевого метода необходимы существенные усложнения (особенно при больших дальностях). Более точные результаты могут быть получены методом нормальных волн, но даже на сравнительно небольших частотах (5-10 Гц) для природных акустических волноводов число суммируемых нормальных волн составляет несколько десятков. В последнее время были предложены комбинированные методы, основанные на представлении поля в волноводе в виде суммы нормальных, геометрических волн и остатка [4-6], а также метод, основанный на суммировании в точке наблюдения гауссовых пучков, каждый из которых связан с лучом, проходящим в некоторой окрестности этой точки [7, 8].

Рассмотрим двумерную задачу нахождения поля точечного источника, расположенного в среде с показателем преломления

$$n^2(z) = 1 - z^2/L^2, \quad (1)$$

где  $L$  — ширина волновода.

Декартова система координат выбрана так, что ось  $z=0$  является осью волновода. Звуковое давление  $u(x, z)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2 n^2(z)) u(x, z) = -\delta(M, M_0) \quad (2)$$

и условиям предельного поглощения на бесконечности  $u(x, z) \rightarrow 0$ ,  $x^2 + z^2 \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } k > 0$ . Источник помещен в точку  $M_0$  с координатами  $(0, z_0)$ , точка наблюдения  $M$  имеет координаты  $(x, z)$ .

Решение задачи известно [1, 2]

$$u(x, z) = \frac{-1}{4\pi} \sqrt{\frac{kL}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikhx} \frac{D_t(z_2) D_t(z_1)}{D_t(0) D_t'(0)} dp, \quad (3)$$

где  $D_t(z)$  — функция параболического цилиндра,  $z_1$  и  $z_2$  — наибольшая и наименьшая из приведенных глубин  $-\sqrt{2k/L} z_1$  и  $\sqrt{2k/L} z_2$ , индекс  $t = kL(1-p^2)/2 - 1/2$ .

С учетом равенства  $D_t(0) D_t'(0) = (2\pi)^{-1/2} \Gamma(t+1) \sin \pi t$  интеграл (3) может быть вычислен по вычетам и представляется в виде суммы ряда

$$u(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi kL}} \frac{\exp\left[ ikx \sqrt{1 - \frac{2n+1}{kL}} \right]}{\sqrt{1 - \frac{2n+1}{kL}}} \frac{D_n(z_1) D_n(z_2)}{n!}, \quad (4)$$

каждое слагаемое в котором является нормальной волной. При  $2n+1 < kL$  нормальная волна является распространяющейся, а при  $2n+1 > kL$  — затухающей вдоль трассы.

Для упрощения формулы (4) воспользуемся производящей функцией, а именно

$$H(\xi, \eta, y) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\xi) D_n(\eta) \frac{y^n}{n!}, \quad (5)$$

где  $H(\xi, \eta, y)$  имеет вид

$$H(\xi, \eta, y) = \exp\left( -\frac{\xi^2 + \eta^2}{4} \cdot \frac{1+y^2}{1-y^2} - \frac{\xi\eta}{1-y^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \quad (6)$$

Формула (6) для произведения функций параболического цилиндра вытекает из аналогичной формулы Мелера (см. [9]) для многочленов Эрмита.

Вернемся теперь к представлению акустического поля в виде суммы нормальных волн (4). Представим экспоненциальный множитель в каждой нормальной

волне в виде интеграла

$$\frac{\exp\left(ikx \sqrt{1 - \frac{2n+1}{kL}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{2k+1}{kL}}} = \sqrt{\frac{kL}{2\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} \exp i\left[\left(\frac{kL-1}{2} - n\right)p + \frac{kx^2}{2Lp}\right] \frac{dp}{\sqrt{p}}. \quad (7)$$

Подставим (7) в (4) и заметим, что возникающий ряд имеет вид (5) с  $y = \exp(-ip)$ , следовательно, его сумма легко может быть найдена. В результате для звукового поля получаем следующее выражение:

$$u(x, z) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2^{3/2}\pi} \int_0^{\infty} \exp\left\{i\left[\frac{kL-1}{2}p + \frac{kx^2}{2Lp} + \frac{z_1^2 + z_2^2}{4} \operatorname{ctg} p - \frac{z_1 z_2}{2 \sin p}\right]\right\} \times \\ \times (1 - e^{-2ip})^{-1/2} \frac{dp}{\sqrt{p}}. \quad (8)$$

Можно показать, что интеграл (8) является сходящимся, и также сходящимися будут интегралы, полученные из (8) однократным дифференцированием по  $x$  или  $z$ . Для возможности двукратного дифференцирования и проверки того, что (8) есть решение уравнения (2), контур интегрирования необходимо при малых  $p$  смещать в нижнюю полуплоскость, а при больших  $p$  — в верхнюю.

Точно таким же образом может быть получена формула для поля точечного источника в пространственном волноводе, если профиль показателя преломления имеет вид (1). Отличие от вышеприведенного вывода формулы (8) для плоской задачи состоит в том, что вместо равенства (7) используется аналогичное равенство

для  $\exp\left(ikR \sqrt{1 - \frac{2n+1}{kR}}\right)$ , которое получается при дифференцировании (7) по  $kx$ ; при суммировании ряда необходимо использовать интегральное представление функции Ханкеля

$$H_0^1(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \exp(iy \operatorname{ctg} q) dq.$$

Возникающий после суммирования ряда нормальных волн дополнительный интеграл по  $q$  простой заменой переменных приводится к интегралу Пуассона, который легко вычисляется.

В результате для поля точечного источника в трехмерном рефракционном волноводе получаем следующее интегральное представление:

$$u(R, z) = \operatorname{const} \int_0^{\infty} \exp\left\{i\left[\frac{kL-1}{2}p + \frac{kR^2}{2Lp} + \frac{z_1^2 + z_2^2}{4} \operatorname{ctg} p - \frac{z_1 z_2}{2 \sin p}\right]\right\} \times \\ \times (1 - e^{-2ip})^{-1/2} p^{-3/2} dp. \quad (9)$$

Цилиндрическая система координат  $(R, z)$  выбрана таким образом, что источник находится на линии  $R=0$ .

Таким образом, звуковые поля в пространственном и плоском волноводах выражаются через схожие между собой интегралы (8), (9), достоинством которых является отсутствие специальных функций в подынтегральных выражениях, что позволяет эффективно применять их при численных расчетах. Важным преимуществом формул (8), (9) является и то, что они легко обобщаются на случай слабонерегулярных по трассе волноводов. Например, если считать параметры  $k$  и  $L$  зависящими от «медленной» переменной  $\varepsilon x$ , где  $\varepsilon \ll 1$  — малый параметр, то, как нетрудно показать, главный член асимптотики по  $\varepsilon$  волнового поля может быть получен из (8) простой

заменой  $kx^2/L$  на  $\left(\int_0^x \sqrt{k(\varepsilon x)/L(\varepsilon x)} dx\right)^2$ . Аналогичное утверждение справедливо и для

пространства. В этом случае  $k$  и  $L$  можно считать функциями «медленных» переменных  $\varepsilon R$  и  $\varepsilon \varphi$  ( $\varphi$  — угол). Необходимо вначале построить центральное поле лучей,

соответствующее функционалу  $I = \int \sqrt{\frac{k(\varepsilon R, \varepsilon \varphi)}{L(\varepsilon R, \varepsilon \varphi)}} ds$ , где  $s$  — длина дуги кривой,

по которой ведется интегрирование. Затем  $\sqrt{k/LR}$  нужно заменить на значение функционала  $I$ , вычисленного на экстремали, выходящей из точки, в которую помещен источник, и проходящей через точку наблюдения  $M$  (см. [10]).

Применение производящей функции (6) для произведения функций параболического цилиндра позволяет существенно упростить представление акустического поля в виде интеграла (3) или ряда (4). Полученная в работе формула (8) не содержит специальных функций и легко обобщается на случай плавнонерегулярных волноводов, что является важным с вычислительной точки зрения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
2. *Будырев В. С.* Поле точечного источника в волноводе // Тр. МИАН. 1971. Т. 115. С. 78–102.
3. *Вешев Н. А.* Распространение звуковых волн вблизи оси рефракционного волновода // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 5. С. 667–670.
4. *Ludwig D.* Diffraction by a circular cavity // J. Math. Phys. 1970. V. 11. № 5. P. 1617–1630.
5. *Кудряшов В. М.* Геометроволновой способ вычисления акустических полей в волноводе // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 5. С. 724–728.
6. *Филиппов В. Б.* Об одном методе расчета поля точечного источника в рефракционном волноводе // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 99. С. 146–156.
7. *Попов М. М.* Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 104. С. 195–216.
8. *Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А.* Численное сравнение двух асимптотических методов решения задач дифракции волн в плавно неоднородных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 1. С. 79–88.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. 296 с.
10. *Бабич В. М.* О коротковолновой асимптотике решения задачи о точечном источнике в неоднородной среде // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5. № 5. С. 949–951.

Ленинградский технологический институт  
холодильной промышленности

Поступило в редакцию  
4.V.1987