АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXXIV 1988 Вып. 3

УДК 534.231.1

НОРМАЛЬНЫЕ МОДЫ В ВОЛНОВОДЕ С МОДЕЛЬЮ ДНА В ВИДЕ НИЗКОСКОРОСТНОГО НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ С ПОГЛОЩЕНИЕМ

Агеева Н. С., Крупин В. Д.

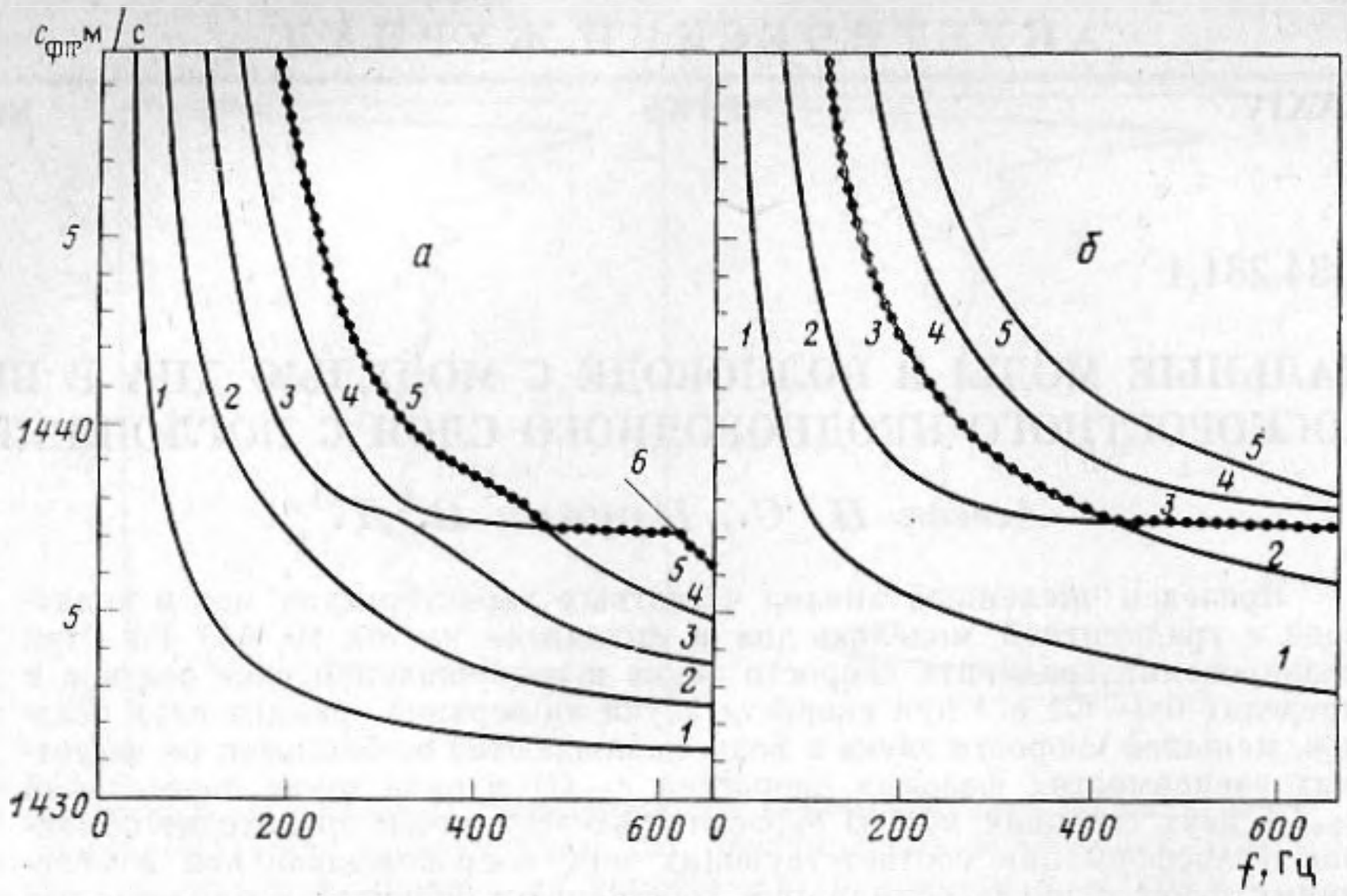
Проведен численный анализ частотных характеристик мод в волноводе с градиентной моделью дна в диапазоне частот 10–640 Гц. При варьировании градиента скорости звука в поглощающем слое осадков в пределах $0 \leqslant G \leqslant 1$ с$^{-1}$ при скорости звука на верхней границе слоя осадков, меньшей скорости звука в воде, наблюдаются особенности на частотных зависимостях фазовых скоростей $c_{\text{ф}n}(f)$ в виде точек пересечений $c_{\text{ф}n}(f)$ двух соседних мод. В окрестностях этих точек происходит обменная трансформация соответствующих мод, сопровождающаяся изменениями форм и числа осцилляций собственных функций. Выявлены две группы мод – водных и донных, с сильно различающимися коэффициентами затухания и собственными функциями.

Применение метода нормальных мод для анализа звуковых полей в волноводах со слоистым поглощающим дном требует численного поиска комплексных собственных значений и собственных функций несамосопряженной краевой задачи для дифференциального уравнения 2-го порядка с импедансным условием на дне [1, 2]. В случаях малых потерь указанные величины могут быть найдены методом малых возмущений [3] по известным вещественным собственным значениям и функциям, соответствующим отсутствию поглощения в дне.

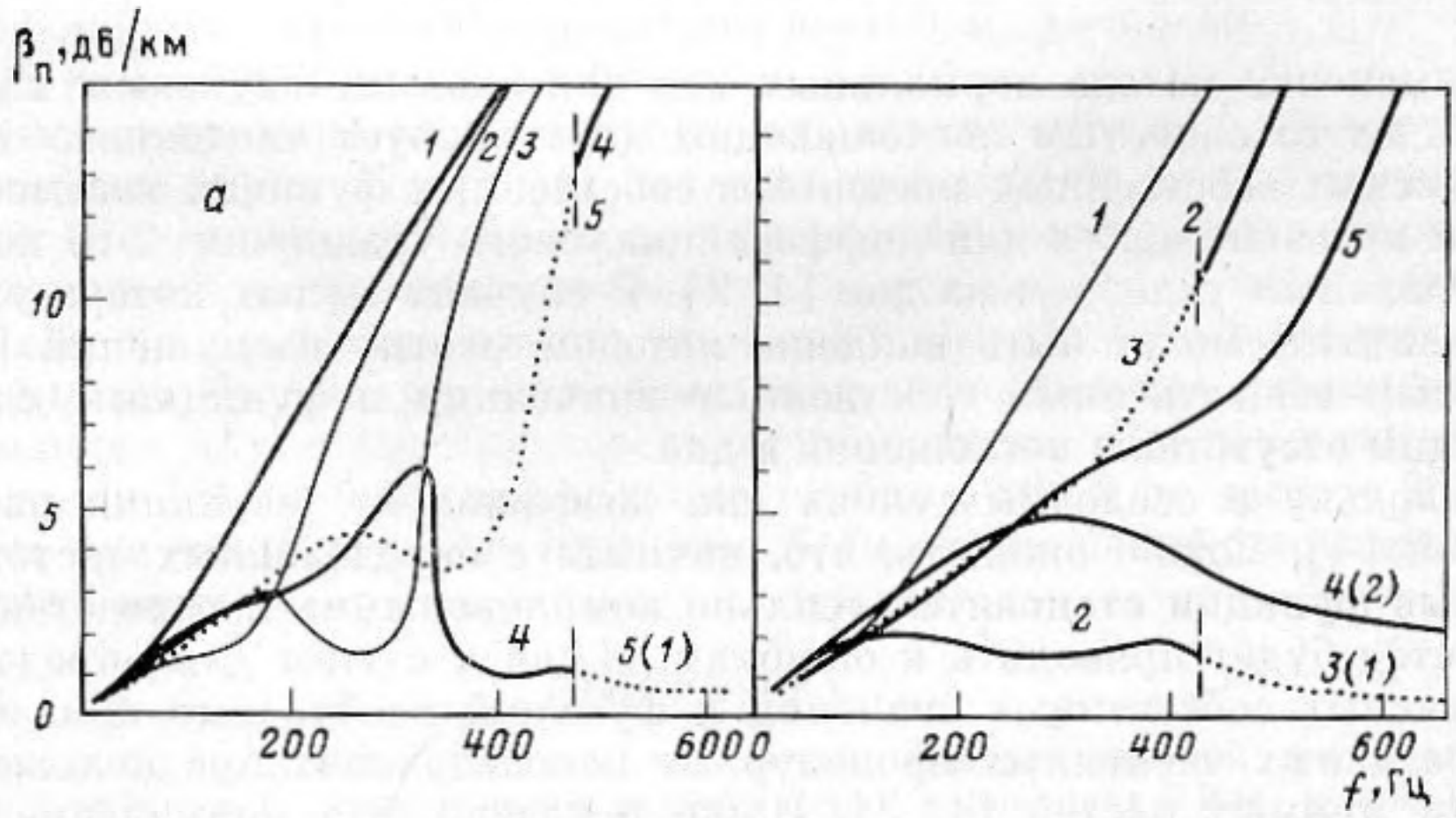
Поскольку в осадочных слоях дна коэффициент затухания растет с частотой [4], можно ожидать, что, начиная с определенных частот, собственные функции становятся «сильно комплексными» и вследствие чего этот метод будет приводить к ошибкам. В связи с этим для определения комплексных собственных значений и функций необходимо привлечение универсальных численных процедур, не использующих предположения о малости мнимых частей [1, 2]. Ниже показано, что применение таких процедур позволяет выявить свойства нормальных мод, которые принципиально не могли быть обнаружены методом малых возмущений.

Настоящая работа посвящена результатам численного исследования частотных зависимостей фазовых скоростей $c_{\text{ф}\,n}(f)$, коэффициентов затухания $\beta_n(f)$ и собственных функций $w_n(z, f)$ мод в волноводе с моделью дна в виде низкоскоростного жидкого поглощающего слоя, скорость звука в котором линейно растет с глубиной. Этот слой рассматривается как модель осадочного слоя в море. Численно исследовано влияние величины градиента скорости звука в осадках $G=\partial c_l/\partial z$ на частотные характеристики мод.

В реальных морских условиях скорость звука в осадочном слое дна растет с глубиной [4]. При этом положительный градиент скорости звука может достигать значений $1 \div 2$ с$^{-1}$, а величина отношения скорости звука c_l в осадках на границе вода – дно к скорости звука c_0 в воде у дна может быть меньше, равна и больше единицы: $c_l/c_0<1$, $c_l/c_0=1$ и $c_l/c_0>1$. Как показали расчеты, в случае однородного осадочного слоя $G=0$ частотные зависимости коэффициентов затухания $\beta_n(f)$, фазовых скоростей $c_{\text{ф}\,n}(f)$ и собственных функций нормальных мод сильно различаются для трех значений c_l/c_0. Поэтому можно ожидать, что при градиенте $G \neq 0$ частотные характеристики мод также будут коренным образом различаться для трех указанных случаев. В настоящей работе рассмотрено поведение частотных характеристик мод только для случая $c_l/c_0<1$. Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6 по программе [1, 2]. Линейная зависимость скорости звука от глубины в слое осадков аппроксимировалась кусочно-по-



Фиг. 1. Частотные зависимости фазовых скоростей мод. Цифры – номера мод G, $с^{-1}$: *а* – 0,06, *б* – 0,25

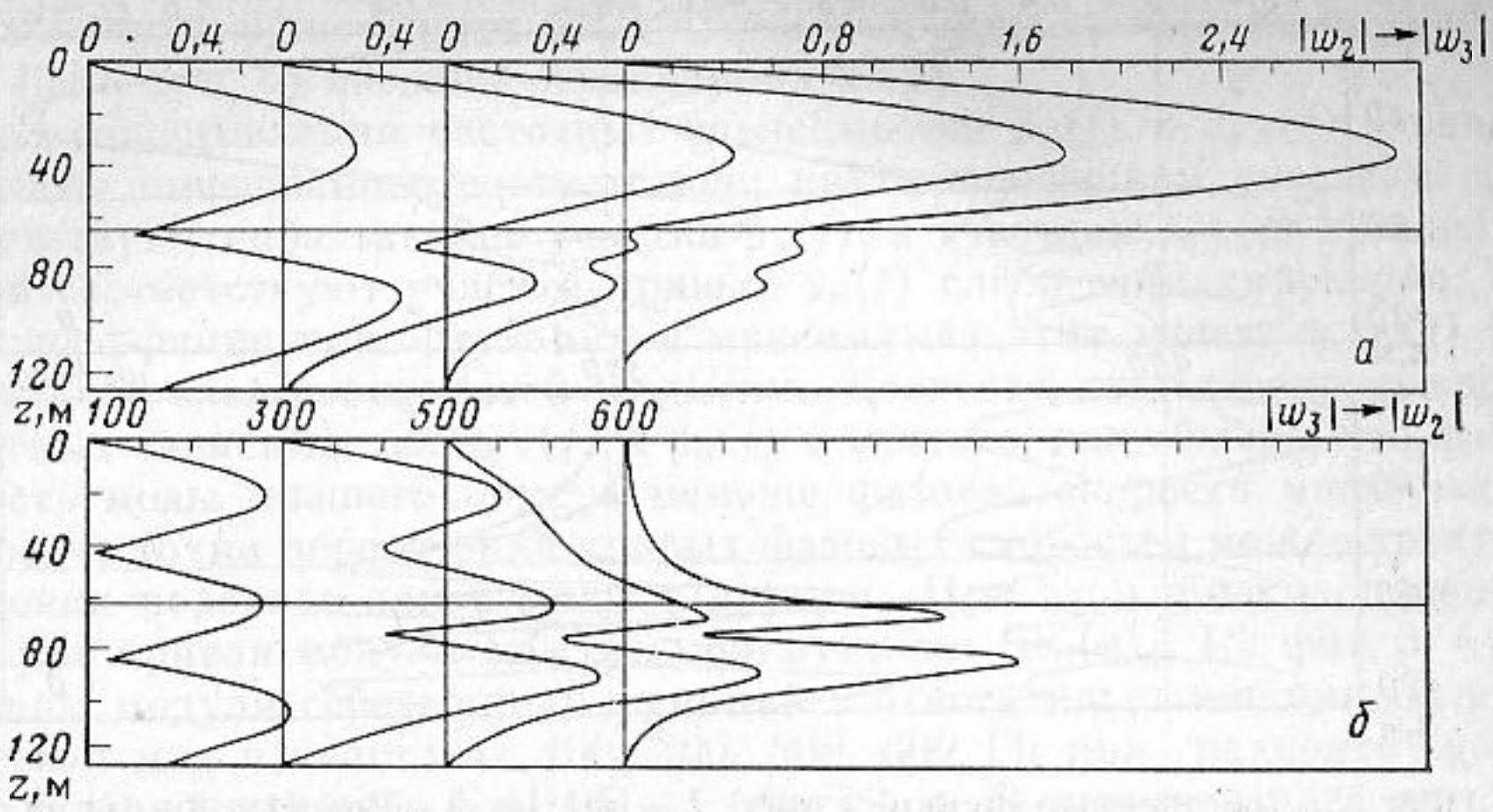


Фиг. 2. Частотные зависимости коэффициентов затухания мод. Цифры – номер мод G, $с^{-1}$: *а* – 0,06, *б* – 0,25

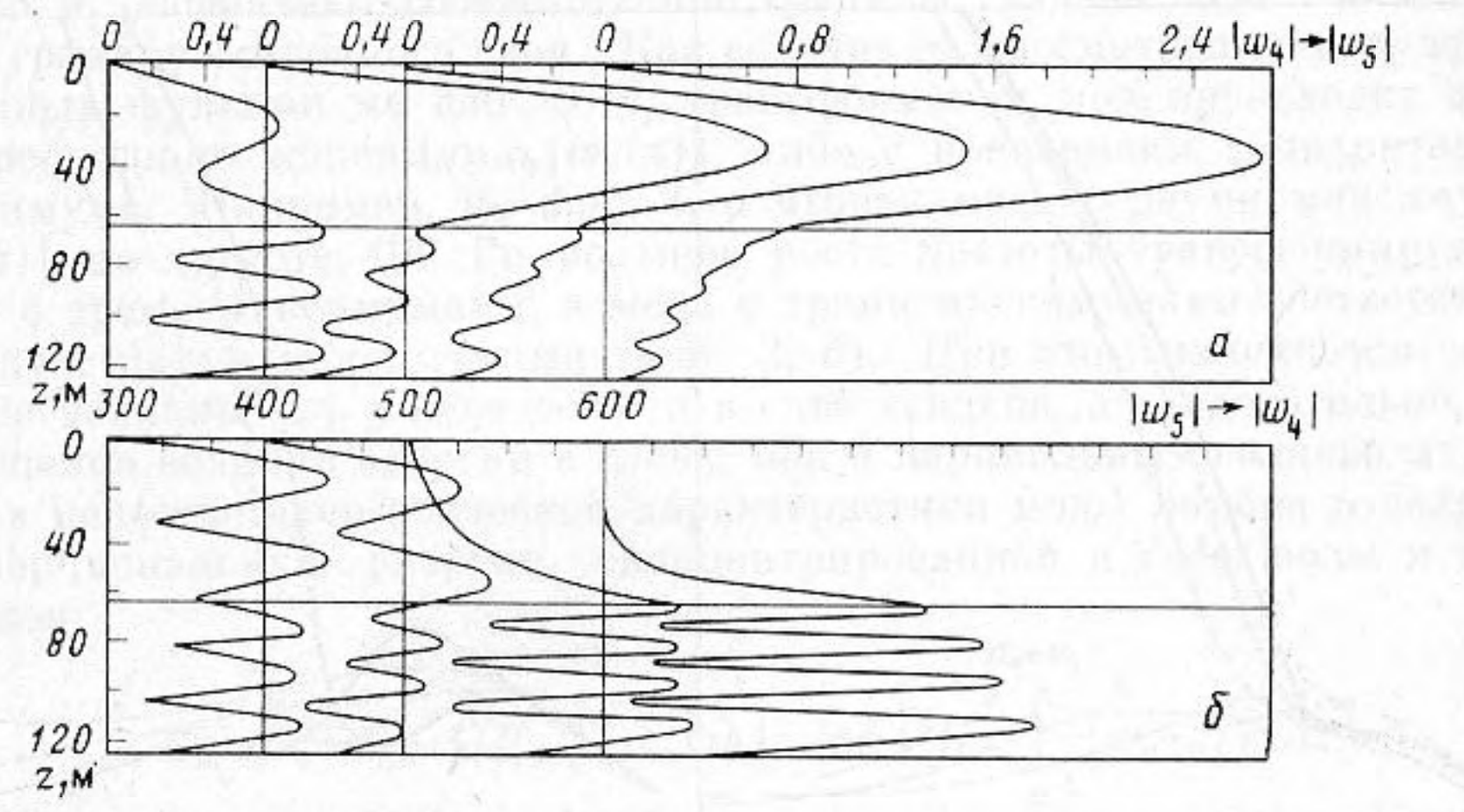
стоянной зависимостью. Толщина элементарного слоя выбиралась достаточно малой, такой, что при увеличении числа слоев вдвое при заданной общей толщине осадочного слоя на самых высоких частотах (640 Гц) фазовые скорости и коэффициенты затухания мод изменялись не более чем на 0,3 м/с и 0,7 дБ/км. Анализ характеристик мод проводился на примере волновода, имеющего следующие параметры: H_0=65 м, H_l=60 м, c_0=1436,93 м/с, c_l=1430 м/с, $\eta_l=10^{-3}$, ρ_l=1,4 г/см^3, c_L=1795 м/с, η_L=0, ρ_L=2 г/см^3. Здесь H – толщина слоя, c – скорость звука, η – коэффициент потерь, ρ – плотность; индексы 0, l, L относятся соответственно к воде, осадочному слою и подстилающему полупространству.

Для того чтобы разобраться в сложной структуре мод в волноводе со слоистой моделью дна, рассмотрим взаимосвязь частотных зависимостей фазовых скоростей $c_{ф\,n}(f)$, коэффициентов затухания $\beta_n(f)$ и собственных функций $w_n(z; f)$ при различных значениях градиентов G.

При повышении положительной величины градиента G увеличивается средняя скорость в осадочном слое, что приводит к повышению фазовых скоростей $c_{ф\,n}$ мод. Расчеты показали, что спадающая с ростом частоты кривая фазовой скорости первой моды носит монотонный характер при всех принятых значениях градиентов. Моды более высоких номеров имеют особенности на спадающих с частотой зависимостях $c_{ф\,n}(f)$ в виде точек

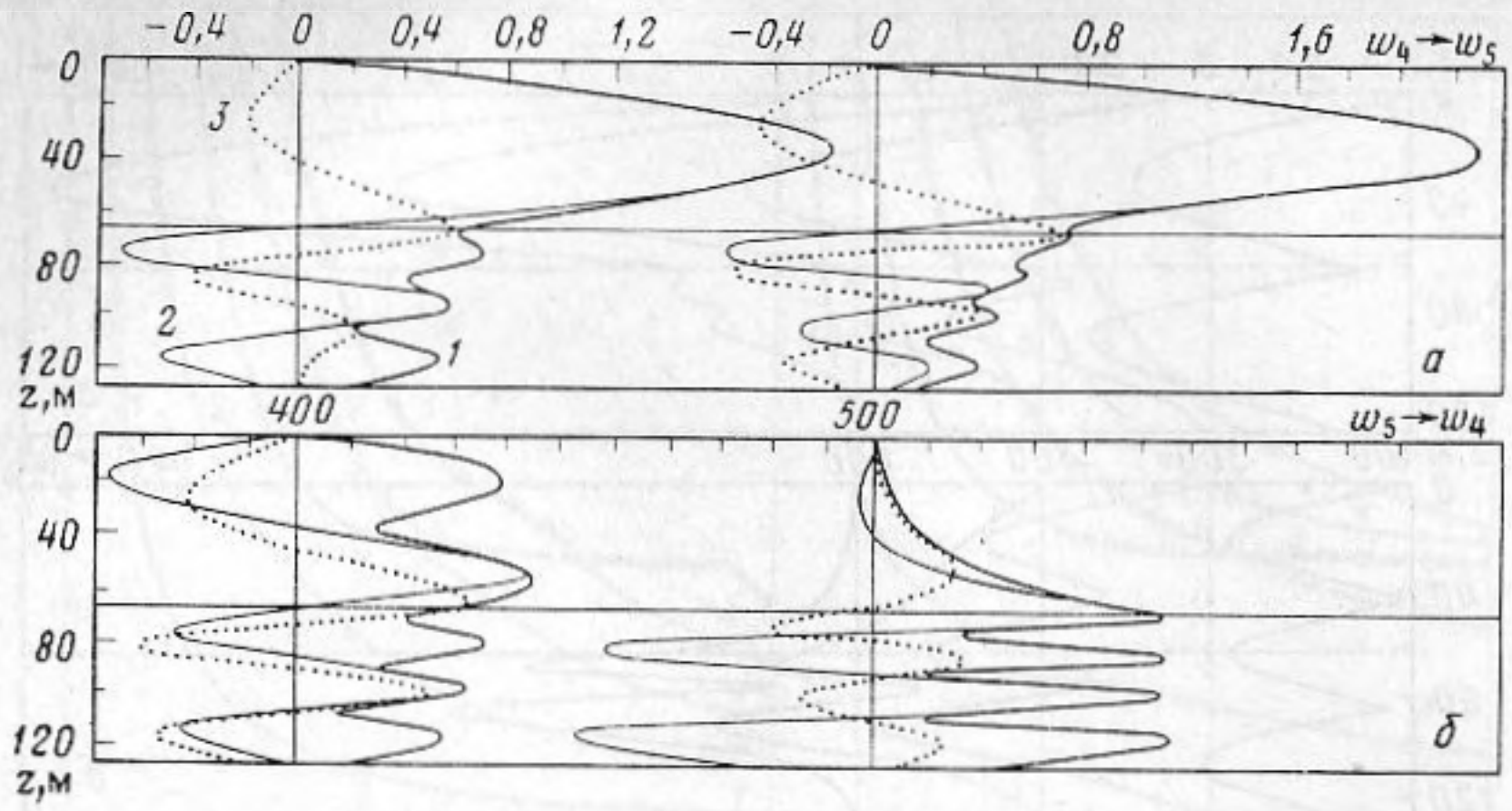


Фиг. 3. Изменение модулей собственных функций с частотой при трансформации мод. Числа – частоты, Гц; $G=0{,}25$ с$^{-1}$, *а* – вторая мода переходит в третью водную, *б* – третья мода переходит во вторую донную

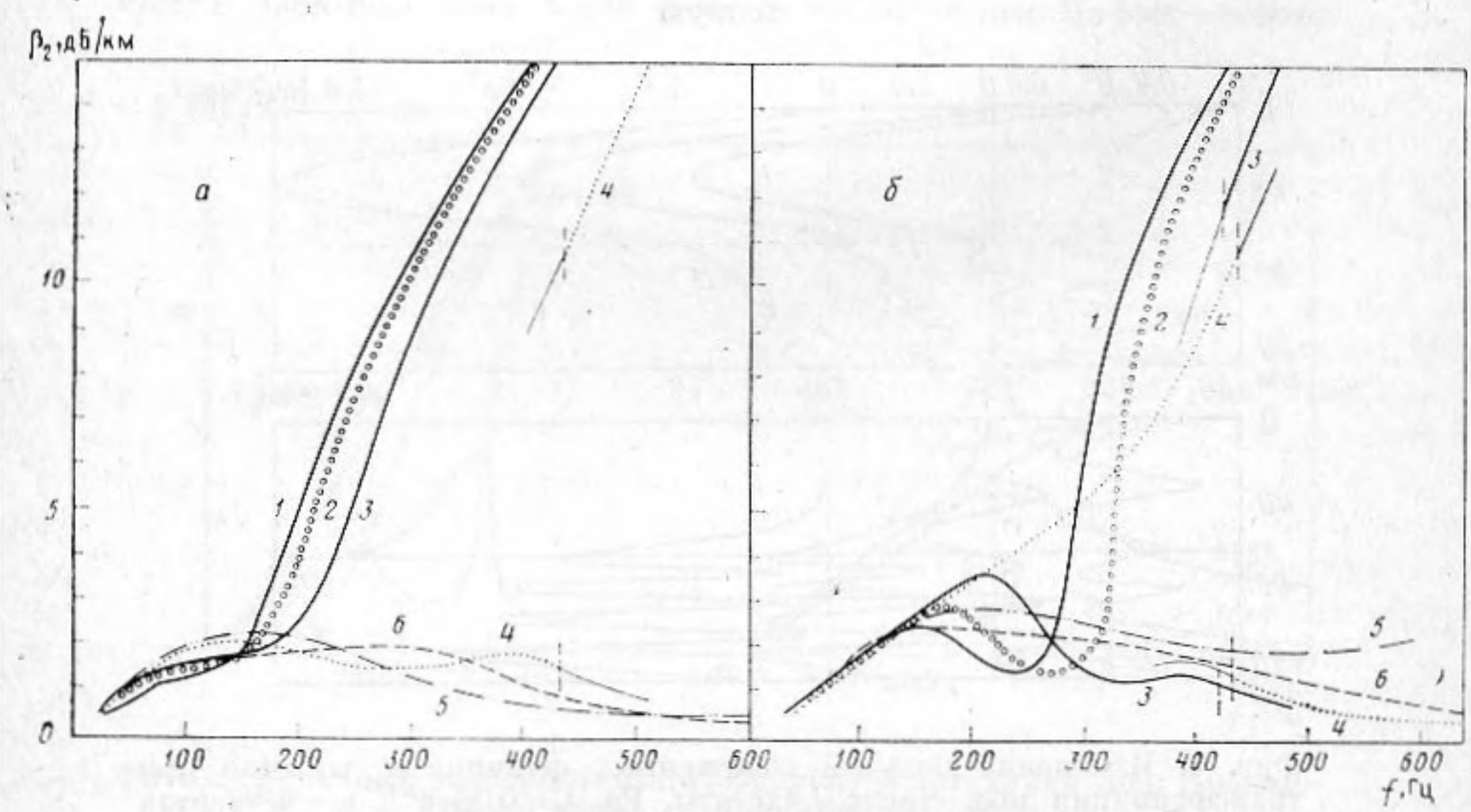


Фиг. 4. Изменение модулей собственных функций с частотой при трансформации мод. Числа – частоты, Гц, $G=0{,}06$ с$^{-1}$, *а* – четвертая мода переходит в пятую водную, *б* – пятая мода переходит в четвертую донную

перегиба либо точек пересечения кривых $c_{ф\,n}(f)$ двух соседних мод. При нулевом градиенте $G=0$ на частотной зависимости фазовой скорости третьей моды $c_{ф\,3}(f)$ наблюдаются точки перегиба, а частотные зависимости четвертой $c_{ф\,4}(f)$ и пятой $c_{ф\,5}(f)$ мод пересекаются в окрестности частоты $f\approx400$ Гц. По мере увеличения градиента G точки перегиба и точки пересечения перемещаются по частоте в сторону более высоких частот, при этом точки перегиба возникают на кривых $c_{ф\,n}(f)$ более низких номеров мод, которые затем превращаются в точки пересечения кривых $c_{ф\,n}(f)$ соседних мод. Так, при изменении градиента G от 0 до 0,06 с$^{-1}$ точка перегиба на кривой $c_{ф\,3}(f)$ третьей моды переместилась по частоте от 300 до 320 Гц, а точка пересечения кривых $c_{ф\,4}(f)$ и $c_{ф\,5}(f)$ переместилась соответственно с частоты $f\approx400$ Гц к частоте $f\approx480$ Гц. При дальнейшем увеличении градиента G точка перегиба появляется на кривой фазовой скорости второй моды $c_{ф\,2}(f)$, а точка перегиба на кривой $c_{ф\,3}(f)$ превращается в точку пересечения кривых $c_{ф\,3}(f)$ и $c_{ф\,4}(f)$ третьей и четвертой мод. Далее по мере роста градиента точки перегиба превращаются в точки пересечения, а точки пересечения перемещаются в сторону более высоких частот (см. фиг. 1) и уже при $G=0{,}5$ с$^{-1}$ оказываются за верхним пределом рассматриваемого диапазона частот 10–640 Гц. В пределах этих частот при градиентах $G\geqslant0{,}5$ с$^{-1}$ остаются только монотонные участки кривых $c_{ф\,n}$.



Фиг. 5. Собственные функции мод: *1* – $|w(z)|$, *2* – $\mathrm{Re}\, w(z)$, *3* – $\mathrm{Im}\, w(z)$. Числа – частоты, Гц; *а* – четвертая водная мода переходит в пятую водную, *б* – пятая мода переходит в четвертую донную



Фиг. 6. Частотные зависимости коэффициентов затухания при варьировании градиента скорости звука G, $с^{-1}$: *1* – 0; *2* – 0,06; *3* – 0,125; *4* – 0,25; *5* – 0,5; *6* – 1, *а* – вторая мода, *б* – третья мода

При анализе модовой структуры поля в слоистом волноводе с потерями возникает вопрос об определении номера моды или ее идентификации. Если в идеальном волноводе номер моды определяется порядком расположения собственных значений, т. е. волновых чисел (или фазовых скоростей) и соответственным числом нулей на кривых собственных функций, то в сложных моделях волноводов со слоистым поглощающим дном такое определение не всегда однозначно. Так, в нашем случае, если номера мод определять порядком расположения их вещественных частей $\mathrm{Re}\, k_n$ комплексных волновых чисел k_n или фазовых скоростей $c_{ф\,n}=2\pi f/\mathrm{Re}\, k_n$, то точка пересечения частотных зависимостей фазовых скоростей двух соседних мод должна определять границу перехода одной моды в другую.

Проследим за поведением частотных зависимостей коэффициентов затухания $\beta_n(f)$ и их соответствием с зависимостями $c_{ф\,n}(f)$. На частотных зависимостях коэффициентов затухания мод $\beta_n(f)$ можно выделить два семейства кривых: нарастающие с частотой $\beta_n(f)$ и медленно спадающие слабо осциллирующие. Коэффициенты затухания мод первых семейств асимптотически стремятся к величинам коэффициентов затухания β_l плоской волны в безграничной среде, характеризуемой параметрами, присущими осадкам: скоростью звука c_l и коэффициентом потерь в осадках η_l,

$\beta_l=8{,}68\times2\pi f\eta_l/c_l$ дБ/км. На частоте 600 Гц при заданных параметрах c_l и η_l величина β_l достигает 22,9 дБ/км (на приводимых нами графиках $\beta_n(f)$ (фиг. 2, *а*, *б*) введены ограничения по β).

При сопоставлении частотных зависимостей $\beta_n(f)$ и $c_{ф\,n}(f)$ можно обнаружить определенное соответствие: круто спадающим участкам $c_{ф\,n}(f)$ соответствуют нарастающие участки $\beta_n(f)$, а участкам $c_{ф\,n}(f)$ с малой крутизной соответствуют участки кривых $\beta_n(f)$ слабо осциллирующие; величины коэффициентов затухания в максимумах этих участков $\beta_n(f)$ в нашем случае едва достигают 5—6 дБ/км. Если следить за непрерывностью частотных зависимостей $c_{ф\,n}(f)$ и $\beta_n(f)$ и считать, как обычно, что фазовая скорость моды низшего номера меньше фазовой скорости моды высшего номера, то точки пересечения кривых фазовых скоростей можно трактовать как точки перехода одной моды в другую. При этом должна измениться по форме кривая модуля собственной функции $|w_n(z)|$. На фиг. 3, 4 представлены модули собственных функций в относительных единицах второй и третьей мод на частотах 100, 300, 500, 600 Гц при градиенте скорости звука в осадочном слое $G=0{,}25$ с$^{-1}$ (фиг. 3, *а*, *б*) и четвертой и пятой мод на частотах в окрестности точки пересечения кривых фазовых скоростей этих мод — 300, 400, 500 и 600 Гц при градиенте $G=0{,}06$ с$^{-1}$ (фиг. 4, *а*, *б*). Горизонтальные линии на графиках фиг. 3—5, проходящие через $z=65$ м, $z=125$ м, обозначают соответственно границы раздела вода — дно и нижнюю границу осадочного слоя. Как следует из рассмотрения модулей собственных функций на фиг. 3, 4, трансформация мод происходит либо с потерей одного максимума $|w_n(z)|$, либо с появлением дополнительного максимума. Например, на фиг. 3, *а* вторая мода с двумя максимумами $|w_2(z)|$ на частоте 100 Гц по мере роста частоты трансформируется в моду с тремя максимумами, а мода с тремя максимумами соответственно в моду с двумя максимумами (фиг. 3, *б*). При этом изменяется соотношение величин $|w|$ в слое воды и в слое осадков, а следовательно, и соотношение величин энергии в слоях, как в парциальных волноводах. Примем в качестве энергетической характеристики моды номера n величину, пропорциональную энергии, сконцентрированной в слое воды и в слое осадков:

$$E_n=E_0+E_l\sim1/H_0\int\limits_0^{H_0}|w_n(z)|^2\,dz+1/H_l\int\limits_{H_0}^{H_0+H_l}|w_n(z)|^2\,dz.$$

Как следует из фиг. 3, *а*, при переходе второй моды с двумя максимумами $|w_2(z)|$ в моду с тремя максимумами при изменении частоты от низких частот к высоким на высоких частотах большая часть энергии концентрируется в водном слое. При переходе третьей моды во вторую (фиг. 3, *б*) большая часть энергии концентрируется в слое осадков. Назовем условно трансформированные моды при условии $E_0/E_n>E_l/E_n$ водными модами, а при условии $E_l/E_n>E_0/E_n$ — донными. Аналогичную картину можно наблюдать на фиг. 4, *а*, *б* для четвертой и пятой мод при градиенте $G=0{,}06$ с$^{-1}$ в окрестности точки пересечения частотных зависимостей фазовых скоростей $c_{ф\,4}(f)$ и $c_{ф\,5}(f)$ $f\approx500$ Гц. Здесь четвертая мода при изменении частоты от низких к высоким трансформировалась в водную моду с пятью максимумами $|w_n(z)|$ (фиг. 4, *а*), а пятая мода перешла в моду с четырьмя максимумами $|w_n(z)|$, расположенными в слое осадков, превратившись в донную моду (фиг. 4, *б*).

Таким образом, в высокочастотной области в этом волноводе существуют две группы мод — водные и донные с сильно различающимися коэффициентами затухания и модулями собственных функций. В окрестностях частот, соответствующих точкам пересечения кривых фазовых скоростей соседних мод, водные моды переходят одна в другую с повышением номера моды, при этом приобретается дополнительный максимум $|w_n(z)|$ в слое осадков. Донные моды переходят одна в другую с понижением номера моды, с потерей одного максимума $|w_n(z)|$ в слое воды. Если отмеченные выше свойства модельного волновода с низкоскоростным поглощающим осадочным слоем рассматривать в плане решения практических

задач, то сильно затухающие донные моды практически не участвуют в формировании звукового поля. Что касается водных мод, то выявленные по порядку расположения волновых чисел в низкочастотной области, например вторая и четвертая моды, на высоких частотах будут иметь соответственно один и два максимума $|w_n(z)|$ в одном слое и могут быть приняты соответственно за первую и вторую моды (на фиг. 2, *а*, *б* цифры в скобках обозначают число максимумов $|w_n(z)|$ в слое воды). Следует заметить, что здесь мы ввели ограничения на число мод, ограничившись пятью модами, в результате чего на высоких частотах для $G=0{,}25$ с$^{-1}$ (фиг. 2, *б*) среди них существуют две водные моды с малыми коэффициентами затухания, а для $G=0{,}06$ с$^{-1}$ (фиг. 2, *а*) — одна мода. При отсутствии ограничения число мод со сравнительно малыми коэффициентами затухания на высоких частотах будет расти с ростом градиента скорости звука G. Анализ показал, что при значении градиента $G=1$ с$^{-1}$ в рассматриваемом диапазоне частот на кривых $c_{ф\,n}(f)$ нет особых точек, и, следовательно, не наблюдается трансформация мод. При $G=1$ с$^{-1}$ только первая мода имеет растущую с частотой зависимость коэффициента затухания $\beta_n(f)$. У всех остальных мод в высокочастотной области коэффициенты затухания слабо понижаются с ростом частоты. Для этих мод максимумы модулей собственных функций, равномерно распределенные по глубине в слоях воды и осадков в низкочастотной области, по мере роста частоты перемещаются из слоя осадков в слой воды. В результате такого перемещения на частоте 600 Гц модуль собственной функции n-й моды $|w_n(z)|$ имеет соответственно n максимумов, один из которых остается в слое осадков. В водном слое при градиенте $G=1$ с$^{-1}$ n-я мода имеет $n-1$ максимумов $|w_n(z)|$.

Отметим еще одну особенность, наблюдаемую при трансформации мод. Если считать за границу перехода моды одного номера в другой точку пересечения частотных зависимостей фазовых скоростей этих мод, то изменение формы кривой собственной функции $|w_n(z)|$, участвующих при трансформации мод, начинает проявляться на частоте, несколько ниже точки пересечения $c_{ф\,n}(f)$.

Представляет интерес проследить за поведением вещественных $\mathrm{Re}\, w_n(z)$ и мнимых $\mathrm{Im}\, w_n(z)$ компонентов комплексной величины собственной функции $w_n(z)$. На фиг. 5, *а*, *б* представлены в относительных единицах $\mathrm{Re}\, w_n(z)$, $\mathrm{Im}\, w_n(z)$ и $|w_n(z)|$ четвертой и пятой мод на частотах 400 и 500 Гц в окрестности точки пересечения частотных зависимостей фазовых скоростей при градиенте скорости звука $G=0{,}06$ с$^{-1}$. Расчеты показали, что в области низких частот, когда волновод ведет себя как единое целое, вещественные и мнимые компоненты собственных функций $\mathrm{Re}\, w_n(z)$ и $\mathrm{Im}\, w_n(z)$ при данном коэффициенте потерь $\eta_l=10^{-3}$ соизмеримы по величине; на высоких частотах, когда связи между слоями ослабевают и образуются как бы два парциальных волновода со своими наборами мод — водными и донными (фиг. 3, 4), превалирующую роль в обоих случаях играют вещественные компоненты собственных функций $\mathrm{Re}\, w_n(z)$.

Поведение частотных зависимостей коэффициентов затухания мод $\beta_n(f)$ при изменении градиента скорости звука G в слое осадков проследим на примере изменения коэффициентов затухания второй и третьей мод при варьировании градиента в пределах 0—1 с$^{-1}$, представленных на фиг. 6, *а*, *б*. На каждом из графиков $\beta_2(f)$ и $\beta_3(f)$ видно по два семейства кривых — нарастающих с частотой и медленно спадающих при слабой осцилляции. Разрывы на кривых $\beta_2(f)$ и $\beta_3(f)$ соответствуют частотам, в окрестностях которых происходит трансформация мод. Расчеты показали, что величины градиентов, при которых вторая мода переходит в третью, лежат в пределах $0{,}125$ с$^{-1}\leqslant G\leqslant 0{,}25$ с$^{-1}$, переход третьей моды в четвертую происходит при градиентах, лежащих в пределах $0<G\leqslant 0{,}25$ с$^{-1}$. Из рассмотрения фиг. 6, *а*, *б* следует, что чем больше градиент G, тем меньше величины коэффициентов затухания. Это объясняется тем, что при увеличении градиента глубины точек заворота лучей, вошедших в слой осадков под одинаковыми углами, уменьшаются, при этом уменьша-

ется эффективная толщина слоя осадков. Это приводит к уменьшению энергии, концентрируемой в слое осадков, в результате чего понижаются коэффициенты затухания.

При проведении численного анализа характеристик мод в рассматриваемом волноводе с поглощающим слоистым неоднородным дном мы не ставили перед собой задачи рекомендовать непосредственное использование полученных результатов для практического применения. Мы хотели показать достаточно сложную физическую картину для такой модели волновода, которая позволяет еще на одну ступеньку приблизить условия задачи к реальным морским условиям и которая, однако, требует дальнейшего усложнения модели и более углубленного анализа. Однако полученные результаты позволяют предостеречь от возможных ошибок в оценке экспериментальных фактов при попытке объяснить их с помощью простейшей модели. Особенно, если это касается вопроса идентификации мод.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. С. Агеева, В. Д. Крупин.* Структура инфразвукового поля в мелком море // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 3. С. 340–345.
2. *Н. С. Агеева, В. Д. Крупин.* Влияние дна на формирование звукового поля в мелком море // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 2. С. 161–166.
3. *S. K. Mitchell.* The role of the seabottom attenuation profile in shallow water acoustic propagation // J. Acoust. Soc. Amer. 1983. V. 73. № 2. P. 465–473.
4. *Э. Л. Гамильтон.* Геоакустические модели морского дна. Акустика морских осадков/Под ред. Хэмптона Л., М.: Мир, 1977. С. 176–210.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
16.VI.1987